Das Feld am Punkt im äußeren elektromagnetischen Feld

Diplomarbeit

Karsten Suhre
Fachbereich Physik
Universität Osnabrück

14. Juni 1991

Betreuer: Prof. J. E. Roberts

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Das Fermifeld in einem äußeren elektromagnetischen Feld wird als Sesquilinearform am Punkt definiert, ohne dabei Testfunktionen zu Hilfe zu nehmen. Es wird gezeigt, daß es die Diracgleichung erfüllt und in einem geeigneten Sinne lokal ist. Ferner werden mit Hilfe des Feldes am Punkt von-Neumann-Algebren definiert, die mit denen des ausgeschmierten Feldes übereinstimmen. Dies ist nicht evident, da man hier keine Translationsinvarianz hat. Dabei wird auch die Twisted-Dualität bewiesen.

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird das Fermifeld in einem äußeren Potential $V(t,\vec{x})$ behandelt, welches sowohl räumlich als auch zeitlich ein so starkes Abfallverhalten aufweist, daß man es als Störung behandeln kann. Unter diesen Umständen läßt sich der Zeitentwicklungsoperator für das Einteilchenproblem über eine Dyson-Reihe definieren. Der zugehörige Einteilchen-Diracoperator ist $(-i\partial\!\!\!/_x + m - \gamma^0 V(x))$. Konkret könnte man als äußeres Feld ein elektromagnetisches Viererpotential A_μ wählen. Dann wäre $\gamma^0 V = A\!\!\!/ = A_\mu \gamma^\mu$ zu setzen.

S.N.M. Ruijsenaars hat in [1], [2] und [3] diese Problemstellung feldtheoretisch behandelt und ein Wightman-Feld definiert, welches die Diracgleichung und die Lokalität erfüllt (siehe Gleichung (26) und (27)). Dieses Feld wird im Laufe dieser Arbeit oft als „ausgeschmiertes Feld“ bezeichnet, da es im Sinne von Wightman [4] als operatorwertige Distribution, welche mit einer Testfunktion ausgeschmiert ist, aufgefaßt werden kann. Einige von Ruijsenaars' Ergebnisse werden im folgenden benutzt.

Man beachte, daß es sich hier um keine vollständige Theorie der Quanten-Elektro-Dynamik handelt, da das äußere Feld fest gegeben ist und keinerlei Rückwirkung des (Elektron)feldes auf dieses berücksichtigt wird. Auch verliert man durch das äußere Feld die Poincarékovarianz.

Für bestimmte Anwendungen ist es wünschenswert, das Feld am Punkt selbst zu kennen, und nicht mit ausgeschmierten Größen zu arbeiten, insbesondere, wenn man Ableitungen der Felder betrachtet. Bekanntlich sind Felder am Punkt aber zu singuläre Größen, als daß man sie durch beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum beschreiben kann. Die einzigen – in einem Punkt lokalisierbaren – beschränkten Operatoren sind Vielfache der Identität.

In dieser Arbeit wird ein Formalismus angegeben, in dem das Feld am Punkt durch eine Sesquilinearform, definiert auf einem dichten Teilraum des Hilbertraums des ausgeschmierte Feldes, beschrieben wird.

Nach Ideen von Fredenhagen und Hertel [5], [6] kann man, wenn das Feld eine polynomiale H-Schranke hat, d.h. wenn der Limes

$$\lim_{f_n \to \delta_x} \|(1+H)^{-k}\Psi(f_n)(1+H)^{-k}\| \qquad \text{für ein } k > 0 \tag{1}$$

existiert, den Träger der Testfunktionen auf einen Punkt zusammenziehen und dabei Matrixelemente des Feldes in Vektoren mit einem genügend hohen Energie-Abfallverhalten betrachten (H ist der Energieoperator der Theorie). Der Grenzwert dieser Matrixelemente definiert eine Sesquilinearform, die im folgenden als „Das Feld am Punkt“ bezeichnet wird.

Allerdings können die Ergebnisse von Fredenhagen und Hertel hier nicht direkt verwendet werden, da sie in ihren Überlegungen die Translationskovarianz der Theorie voraussetzen.

Auch gibt es für das Feld im äußeren Feld keinen wohldefinierten Hamiltonoperator H. Es wird jedoch gezeigt, daß es in diesem Fall trotzdem möglich ist, das Feld am Punkt als Sesquilinearform auf einer dichten Teilmenge des Vielteilchenhilbertraums zu definieren, indem man den Hamiltonoperator des freien Feldes benutzt. Trotz fehlender Translationsinvarianz kann der Definitionsbereich der Sesquilinearform unabhängig vom Punkt x gewählt werden.

Es wird gezeigt, daß das Feld am Punkt dieselben Informationen enthält wie das ausgeschmierte Feld: es erfüllt die Diracgleichung, es ist in einem noch zu definierenden Sinne lokal, überintegriert mit einer Testfunktion erhält man das ausgeschmierte Feld zurück und es erzeugt dieselben von-Neumann-Algebren.

Es ist also in diesem Fall möglich, die Theorie direkt auf der Basis von Sesquilinearformen aufzubauen, ohne auf Wightmanfelder zurückgreifen zu müssen.

Ein Hauptteil des Beweises der Gleichheit der von-Neumann-Algebren besteht aus dem Beweis der Twisted Dualität für das Fermifeld im äußeren Feld, welche auch an sich von Interesse ist.

2 Das wechselwirkende Feld bei Ruijsenaars

In diesem Kapitel werden Definitionen und Ergebnisse aus Arbeiten von Ruijsenaars angegeben, auf die später zurückgegriffen wird.

2.1 Der Einteilchenraum

Der Einteilchenraum $\mathcal{H}$ ist in der Impulsdarstellung eine direkte Summe aus zwei Hilberträumen: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_\pm = L^2(\mathbb{R}^3, d\vec{p})^2$ mit zugehörigen Projektoren $P_\pm$ auf den Raum der Teilchen $\mathcal{H}_+$ bzw. Antiteilchen $\mathcal{H}_-$. In der Ortsdarstellung hat man den Hilbertraum $\check{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}^3, d\vec{x})^4$, den man durch Transformation mit dem unitären Operator $W : \mathcal{H} \to \check{\mathcal{H}}$ erhält, welcher definiert ist durch

$$(Wg)_\alpha(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{i,\epsilon} \int d\vec{p} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} e^{i\epsilon\vec{p}\cdot\vec{x}} w^i_\epsilon(\vec{p})_\alpha g^i_\epsilon(\vec{p}) \quad \alpha = 1, .., 4 \tag{2}$$

$$\left(W^{-1}f\right)^i_\epsilon(\vec{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int d\vec{x} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} e^{-i\epsilon\vec{p}\cdot\vec{x}} \overline{w}^i_\epsilon(\vec{p}) \cdot f(\vec{x}) \quad \epsilon = +, -,\ i = 1, 2 \tag{3}$$

Ruijsenaars versteht die Integrale als Integrale im Mittel. Im wesentlichen handelt es sich beim Operator W um eine Fouriertransformation; zusätzlich wird hier noch den Spinorindizes Rechnung getragen.

$$E_p{}^2 := |\vec{p}|^2 + m^2 \tag{4}$$

$$w^i_+(\vec{p}) := u_i(\vec{p}), \quad w^i_-(\vec{p}) := v_i(\vec{p}) \tag{5}$$

$$u_1(\vec{p}) := \left(\frac{E_p + m}{2m}\right)^{1/2} \left(1, 0, \frac{p_3}{E_p + m}, \frac{p_1 + ip_2}{E_p + m}\right) \tag{6}$$

Die $w_\epsilon^i(\vec{p})$ sind die Einheitsspinoren der freien Diracgleichung. u_1 ist hier explizit angegeben, die anderen sehen ähnlich aus und sind in [2] zu finden. Vektoren in der Ortsdarstellung tragen Spinorindizes $\alpha = 1, .., 4$, Vektoren in der Impulsdarstellung werden durch den Index $\epsilon = +, -$ für Teilchen bzw. Antiteilchen und $i = 1, 2$ für Spin auf bzw. ab gekennzeichnet.

Im folgenden bezeichnet $O = W^{-1}\check{O}W$ einen Operator im Impulsraum, wenn $\check{O}$ ein Operator auf $\check{\mathcal{H}}$ ist.

Der Hamiltonoperator in der Ortsdarstellung ist

$$\check{h}_0 = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \tag{7}$$

In der Impulsdarstellung wirkt er multiplikativ als

$$(h_0 f)_\epsilon^i(\vec{p}) = \epsilon E_p f_\epsilon^i(\vec{p}) \quad \forall f \in D(h_0) \tag{8}$$

Man beachte, daß Ruijsenaars' Einteilchenraum nur eine mathematische Hilfsgröße zur Definition des physikalischen Vielteilchenraums ist, denn, wie man sieht, treten hier unphysikalische negative Energien auf.

2.2 Der Zeitentwicklungsoperator

Ruijsenaars definiert in [2] einen Zeitentwicklungsoperator $U(T_2, T_1)$ für die Diracgleichung mit Störung im Wechselwirkungsbild und zeigt, daß dieser unitär ist, wenn das äußere Feld in der Ortsdarstellung durch eine hermitsche 4×4 Matrix $\check{V}$ mit Matrixelementen aus $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)$ beschrieben wird, d.h. $\check{V} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^{16}$. In der Impulsdarstellung kann das äußere Feld als Operator von $\mathbb{R}$ in die beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ aufgefaßt werden ($t \mapsto V(t)$) und es gilt $\|V(\cdot)\| \in L^1(\mathbb{R})$. Ruijsenaars zeigt in [2] die Wohldefiniertheit der folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned} O(t) \quad &:= \quad e^{ih_0 t} V(t) e^{-ih_0 t} && (9) \\ R^{(n)}(T_2, T_1) \quad &:= \quad i^n \int_{T_1}^{T_2} dt_1 .. \int_{T_1}^{t_{n-1}} dt_n O(t_1)..O(t_n) \qquad n \geq 1 && (10) \\ U(T_2, T_1) \quad &:= \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(T_2, T_1) && (11) \end{aligned}$$

Er beweist für $U(T_2, T_1)$ die üblichen Eigenschaften eines Zeitentwicklungsoperators für alle $T_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} U(T_2, T_1) \quad &: \quad D(h_0) \to D(h_0) && (12) \\ U(T, T) \quad &= \quad I && (13) \\ U(T_2, T_1)^* \quad &= \quad U(T_1, T_2) && (14) \\ U(T_3, T_2)U(T_2, T_1) \quad &= \quad U(T_3, T_1) && (15) \\ \partial_t U(t, T_1) \quad &= \quad iO(t)U(t, T_1) && (16) \\ \partial_t U(T_2, t) \quad &= \quad -iU(T_2, t)O(t) && (17) \end{aligned}$$

$D(h_0)$ bezeichnet den Definitionsbereich des Einteilchenhamiltonoperators.

Lemma 1: Man kann eine Rekursionsformel für $R^{(n)}(T_2, T_1)$ angeben:

$$R^{(n+1)}(T_2, T_1) := i \int_{T_1}^{T_2} dt O(t) R^{(n)}(t, T_1) \qquad n \geq 1 \tag{18}$$

Beweis: Anwenden der Definition von $R^{(n)}(T_2, T_1)$ und Umindizieren gibt

$$\begin{aligned} R^{(n+1)}(T_2, T_1) &= i^{n+1} \int_{T_1}^{T_2} dt_1 .. \int_{T_1}^{t_n} dt_{n+1} O(t_1)..O(t_{n+1}) \\ &= i \int_{T_1}^{T_2} dt O(t)\, i^n \int_{T_1}^{t} dt_1 .. \int_{T_1}^{t_{n-1}} dt_n O(t_1)..O(t_n) \\ &= i \int_{T_1}^{T_2} dt O(t) R^{(n)}(t, T_1) \end{aligned}$$

■

2.3 Der Fockraum

Als Darstellungsraum der Feldoperatoren benutzt Ruijsenaars [1] den antisymmetrischen Fockraum $\mathcal{F}$ über dem Einteilchenraum $\mathcal{H}$, $\mathcal{F} = \Gamma(H)$. Er definiert Erzeuger und Vernichter für Teilchen und Antiteilchen.

Ein Element des Fockraums Ψ wird geschrieben als

$$\left\{ \Psi^{(n,r)}(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{p}_n, \alpha_n, \vec{q}_1, \beta_1..\vec{q}_r, \beta_r) \right\}$$

wobei $n, r \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i, \beta_j \in \{1, 2\}$ sind. $\Psi^{(n,r)}$ ist jeweils antisymmetrisch unter Vertauschung von Teilchen- bzw. Antiteilchenvariablen. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \sum_{n,r}^{\infty} \sum_{\alpha_1 ... \beta_r} \int d\vec{p}_1..d\vec{q}_r \overline{\Psi_1^{(n,r)}}(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \Psi_2^{(n,r)}(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \tag{19}$$

Der Vernichter eines Teilchens $a(f)$, $f \in \mathcal{H}_+$, ist definiert als

$$(a(f)\Psi)^{(n,r)}(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) = (n+1)^{1/2} \sum_{i=1}^{2} \int d\vec{p} \overline{f}^i(\vec{p}) \Psi^{(n+1,r)}(\vec{p}, i, \vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \tag{20}$$

und der Erzeuger eines Antiteilchens $b^*(g)$, $g \in \mathcal{H}_-$ als

$$(b^*(g)\Psi)^{(n,r)}(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) = r^{-1/2} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{n+1+j} g_{\beta_j}(\vec{q}_j) \Psi^{(n,r-1)}(\vec{p}_1, \alpha_1..\widehat{\vec{q}_j}, \widehat{\beta}_j..\vec{q}_r, \beta_r) \tag{21}$$

Der Erzeuger eines Teilchen und der Vernichter eines Antiteilchens ist analog definiert. Sie erfüllen die kanonischen Antivertauschungsrelationen, d.h. die einzigen von Null verschiedenen Antikommutatoren sind

$$\{a(f_1), a^*(f_2)\} = (f_1, f_2)_{\mathcal{H}_+} \qquad \{b(g_1), b^*(g_2)\} = (g_1, g_2)_{\mathcal{H}_-} \tag{22}$$

Erzeuger und Vernichter sind im Fermifall beschränkte Operatoren. Beispielsweise gilt $\|a(f)\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_{\mathcal{H}_+}$ und $\|b^*(g)\|_{\mathcal{F}} = \|g\|_{\mathcal{H}_-}$. Außerdem definiert Ruijsenaars Feldopertoren $\mathbf{\Phi}(v)$, $v \in \mathcal{H}$, mittels

$$\mathbf{\Phi}(v) := a(P_+ v) + b^*(\overline{P_- v}) \tag{23}$$

Man beachte, daß diese Operatoren antilinear in v sind und auch die CAR erfüllen:

$$\{\mathbf{\Phi}(u), \mathbf{\Phi}^*(v)\} = (u, v)_{\mathcal{H}} \tag{24}$$

$\mathbf{\Phi}(v)$ ist nach obiger Konstruktion eine Fockdarstellung der CAR auf $\mathcal{F}$. Diese Felder dienen als Hilfsfelder bei der Definition des Diracfeldes im äußeren Feld.

2.4 Das wechselwirkende Feld

Mit den Ergebnissen aus [1] und [2] konstruiert Ruijsenaars in [3] das wechselwirkende Feld im äußeren Feld V. Als Testfunktionenraum benutzt er $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$. Im folgenden seien $F, G \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$

$$\Psi^{\text{int}}(F) := \mathbf{\Phi}\left(\int dt U^*(t, -\infty) e^{ih_0 t} W^{-1} \overline{F}(t, \cdot)\right) \tag{25}$$

Das Feld erfüllt die Diracgleichung im Sinne operatorwertiger Distributionen, d.h.

$$\Psi^{\text{int}}((i\partial\!\!\!/^t + m - B^t)F) = 0, \quad B(x) = \gamma^0 V(x) \tag{26}$$

(B^t bezeichnet die transponierte Matrix) und ist lokal, d.h. wenn F und G raumartig getrennte Träger haben, gilt

$$\left\{\Psi^{\text{int}}(F), \Psi^{\text{int}}(G)^*\right\} = 0 \tag{27}$$

3 Definition des Feldes am Punkt

Formal erhält man das Feld am Punkt als Limes des ausgeschmierten Feldes, indem man mit der Testfunktion eine Deltadistribution approximiert. Dieser Limes existiert jedoch nicht im Raum der linearen Operatoren auf dem Hilbertraum.

Um dem Limes dennoch einen Sinn zu geben, wertet man das ausgeschmierte Feld nur in Matrixelementen mit einem polynomialen Energieabfallverhalten aus: $\Phi, \mathcal{X} \in D^k_{H_0}$; mit der Notation

$$D^k_{H_0} := \begin{cases} D({H_0}^k), & k > 0 \\ \mathcal{F} \quad, & k \leq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{C}^\infty(H_0) := \bigcap_k D^k_{H_0} \tag{28}$$

k ist geeignet zu wählen. Diese Idee geht auf Hertel [5] zurück, jedoch hat man im Fall des äußeren Feldes keinen wohldefinierten Operator der Gesamtenergie H. Wie aber im weiteren zu erkennen ist, kann man sich hier mit dem Hamiltonoperator H_0 des freien Feldes behelfen, der definiert ist durch

$$[(1+H_0)\,\Psi]^{(n,r)}\left(\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r\right) = \left(1+\sum_{i=1}^{n} E_{p_i} + \sum_{j=1}^{r} E_{q_j}\right)\Psi^{(n,r)}\left(\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r\right) \tag{29}$$

Auf dem so eingeschränkten Definitionsbereich ($D^k_{H_0}$), in Matrixelementen ausgewertet, können dann für die Erzeuger und Vernichter Testfunktionen zugelassen werden, die nicht mehr in $\mathcal{H}$ liegen, sondern zu Beispiel lediglich beschränkte stetige Funktionen sind. Man erhält so „verallgemeinerte“ Erzeuger und Vernichter als Sesquilinearformen auf $D^k_{H_0}$, die mit den ursprünglichen übereinstimmen, wenn man Testfunktionen mit quadratischem Abfallverhalten in $\vec{p}$ einsetzt.

Die Erweiterung des Testfunktionenraums der Erzeuger und Vernichter auf stetige beschränkte Funktionen erlaubt es nun, den Limes $F_n \to \delta_x$ durchzuführen, denn die Testfunktionen des ausgeschmierte Feldes sind mit denen der Erzeuger und Vernichter über eine Fouriertransformation verknüpft. Die Fouriertransformierte der Deltafunktion ist bekanntlich die konstante Funktion. Beim Grenzübergang wird der Raum der beschränkten Funktionen also nicht verlassen (vergl. (3), (23) und (25)).

Außerdem ist es notwendig, den Zeitentwicklungsoperator so zu verallgemeinern, daß man ihn auf beschränkte stetige Funktionen anwenden kann. Es wird gezeigt, daß er diesen Raum in sich abbildet.

Es werden also alle notwendigen Größen so verallgemeinert, daß man den Grenzübergang durchführen kann, ohne den Definitionsbereich zu verlassen. Dies ist das Programm für die nächsten Kapitel.

3.1 Verallgemeinerung der Feldoperatoren auf Sesquilinearformen

Definition 1: (Testfunktionenraum für die erweiterten Erzeuger und Vernichter) $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^3\right)$ sei der Raum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^3$. Dann definiere

$$\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right) := \left\{ f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^3\right) : \exists c_f \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(\vec{p})| \le c_f\,(1+|\vec{p}|)^k \;\; \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{30}$$

$f^i(\vec{p})$ bezeichne eine Funktion in $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ und $f^i_\epsilon(\vec{p})$ eine in $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$, $i=1,2$, $\epsilon=+,-$.

Auf $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)$ definiert man mittels folgender Norm eine Topologie:

$$\begin{aligned} \|f\|_k &:= \sup_{\vec{p}} \{(1+|\vec{p}|)^{-k} |f(\vec{p})|\} \\ &= \inf\left\{c_f : |f(\vec{p})| \le c_f (1+|\vec{p}|)^k\right\} \end{aligned} \tag{31}$$

Diese Norm induziert Normen auf $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^s$, $s=2,4$, indem man zusätzlich das Maximum über alle Spinorindizes bildet. Für diese Normen sollen keine neuen Notationen eingeführt werden, da jeweils klar ist, um welchen Raum es sich handelt.

Bemerkung: Offensichtlich gilt

$$k < l \;\Rightarrow\; \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big) \subset \mathcal{P}^l\big(\mathbb{R}^3\big) \tag{32}$$

Achtung: die Datei lbanach.tex fehlt!

Beweis: $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)$ ist ein normierter linearer Raum. Zu beweisen ist die Vollständigkeit. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)$, dann gilt: gegeben $\epsilon > 0$, es existiert ein n_0, so daß für alle $n, m > n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_k < \epsilon$$

Punktweise gilt daher

$$|f_n(\vec{p}) - f_m(\vec{p})|\,(1 + |\vec{p}|)^{-k} < \epsilon$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ gibt es zu jedem $\vec{p}$ ein $g(\vec{p}) \in \mathbb{C}$ mit

$$\big|f_n(\vec{p})(1 + |\vec{p}|)^{-k} - g(\vec{p})\big| \leq \epsilon$$

g ist gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen und damit selbst stetig. $|g(\vec{p})| \leq \|f_n\|_k + \epsilon$. Setze $f(\vec{p}) := g(\vec{p})(1+|\vec{p}|)^k$. f ist stetig und $\sup|f(\vec{p})|(1+|\vec{p}|)^{-k} = \sup|g(\vec{p})| \leq \|f_n\|_k + \epsilon$. Es gilt $f \in \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)$ und $f_n \to f$. Jede Cauchyfolge ist also konvergent und $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)$ ist damit vollständig. ■

Definition 2: (Verallgemeinerung einiger Operatoren von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4$)

Für $k \leq -2$ ist $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^2 \subset \mathcal{H}_\pm$ und $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4 \subset \mathcal{H}$. Für $k > -2$ können einige Operatoren, die Ruijsenaars auf $\mathcal{H}$ definiert, auch auf $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ definiert werden. Sei $f \in \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4$,

$$\begin{array}{lll} \hat{P}_\pm : \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4 \to \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^2 & [\hat{P}_\pm f]^i(\vec{p}) := f^i_\pm(\vec{p}) & \\ \hat{h}_0 : \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4 \to \mathcal{P}^{k+1}\big(\mathbb{R}^3\big)^4 & [\hat{h}_0 f]^i_\epsilon(\vec{p}) := \epsilon E_p f^i_\epsilon(\vec{p}) & \\ \hat{P}_j : \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4 \to \mathcal{P}^{k+1}\big(\mathbb{R}^3\big)^4 & [\hat{P}_j f]^i_\epsilon(\vec{p}) := \epsilon p_j f^i_\epsilon(\vec{p}) & j = 1,2,3 \end{array} \tag{33}$$

Diese Operatoren sind offensichtlich stetig.

Lemma 2: Es seien $f, g \in \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^2$ und $\Phi, \mathcal{X} \in D^{k+5/2}_{H_0}$, dann können die folgenden, in f antilinearen bzw. in g linearen, Sesquilinearformen definiert werden.

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\hat{a}(f)|\mathcal{X}\rangle \;:=\; & \sum_{n,r}^{\infty} \sum_{\alpha_1 \ldots \beta_r} \int d\vec{p}_1..d\vec{q}_r \overline{\Phi^{(n,r)}}\,(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \\ & \cdot (n+1)^{1/2} \sum_{i=1}^{2} \int d\vec{p}\,\overline{f^i}(\vec{p}) \mathcal{X}^{(n+1,r)}\,(\vec{p}, i, \vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\hat{b}^*(g)|\mathcal{X}\rangle \;:=\; & \sum_{n,r}^{\infty} \sum_{\alpha_1 \ldots \beta_r} \int d\vec{p}_1..d\vec{q}_r (r+1)^{1/2} \sum_{j=1}^{2} \int d\vec{q} g^j(\vec{q}) \\ & \cdot \overline{\Phi^{(n,r+1)}}\,(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}, j, \vec{q}_1, \beta_1..\vec{q}_r, \beta_r)\, \mathcal{X}^{(n,r)}\,(\vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r) \end{aligned} \tag{35}$$

Für $k > -2$ gelten die folgenden Abschätzungen

$$|\langle\Phi|\hat{a}(f)|\mathcal{X}\rangle| \leq \|\frac{1}{\sqrt{m}}(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)}f\|_{\mathcal{H}_+}\|\Phi\|_{\mathcal{F}}\|(1+H_0)^{(k+5/2)}\mathcal{X}\|_{\mathcal{F}} \tag{36}$$

$$|\langle\Phi|\hat{b}^*(g)|\mathcal{X}\rangle| \leq \|\frac{1}{\sqrt{m}}(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)}g\|_{\mathcal{H}_-}\|(1+H_0)^{(k+5/2)}\Phi\|_{\mathcal{F}}\|\mathcal{X}\|_{\mathcal{F}} \tag{37}$$

und für $k \leq -2$ gilt

$$\langle\Phi|\hat{a}(f)|\mathcal{X}\rangle = (\Phi, a(f)\mathcal{X}) \tag{38}$$

$$\langle\Phi|\hat{b}^*(g)|\mathcal{X}\rangle = (\Phi, b^*(g)\mathcal{X}) \tag{39}$$

Beweis: Vernichter $\hat{a}(f)$: für $k \leq -2$ ist nichts zu zeigen, denn hier stimmen die verallgemeinerten Erzeuger- und Vernichter mit denen bei Ruijsenaars überein und sind als Operatoren auf $\mathcal{F}$ definiert (vergl. (20)), $\langle\Phi|\hat{a}(f)|\mathcal{X}\rangle = (\Phi, a(f)\mathcal{X})$. Sei also nun $k > -2$. Hier genügt es, zu zeigen, daß der – offensichtlich meßbare – Integrand eine integrierbare Majorante hat.
Zunächst nutzt man nun aus, daß für alle $\tilde{\mathcal{X}} \in \mathcal{F}$ gilt

$$\left[(1+H_0)^{-(k+5/2)}\,\tilde{\mathcal{X}}\right]^{(n+1,r)}(\vec{p}, i, \vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r)$$

$$= \left(1 + E_p + \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} + \sum_{j=1}^{r} E_{q_j}\right)^{-(k+5/2)} \tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}(\vec{p}, i, \vec{p}_1, \alpha_1..\vec{q}_r, \beta_r)$$

und schätzt (vgl. Hertel [5]) die folgende Größe ab

$$(n+1)^{1/2}\left(1 + E_p + \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} + \sum_{j=1}^{r} E_{q_j}\right)^{-(k+5/2)}$$

$$\leq \left(\frac{n+1}{1+(n+1+r)m}\right)^{1/2}\left(1 + E_p + \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} + \sum_{j=1}^{r} E_{q_j}\right)^{-(k+2)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{m}}\,(1+E_p)^{-(k+2)}$$

wobei $0 < m \leq E_p$ und $k > -2$ ausgenutzt wurde.
Definiert man $\tilde{\mathcal{X}} := (1+H_0)^{(k+5/2)}\mathcal{X}$, so gilt mit obiger Abschätzung

$$(n+1)^{1/2}|\mathcal{X}^{(n+1,r)}| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\,(1+E_p)^{-(k+2)}\,|\tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}|$$

Für den Integranden hat man dann die folgende Majorante, deren Integrierbarkeit noch zu zeigen bleibt

$$|\overline{\Phi^{(n,r)}}\,(\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,(n+1)^{1/2}\overline{f^i}(\vec{p})\mathcal{X}^{(n+1,r)}\,(\vec{p},i,\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,|$$

$$\leq |\Phi^{(n,r)}\,(\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,|\frac{1}{\sqrt{m}}\,(1+E_p)^{-(k+2)}\,|f^i(\vec{p})||\tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}\,(\vec{p},i,\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,|$$

Definiere

$$h^i(\vec{p}) := \frac{1}{\sqrt{m}}\,(1+E_p)^{-(k+2)}\left|f^i(\vec{p})\right|$$

Da $f \in \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^2$ ist, gilt

$$\left|h^i(\vec{p})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\,(1+E_p)^{-(k+2)}\,c_f\,(1+|\vec{p}|)^k$$

Für große $|\vec{p}|$ verhält sich die Schranke wie $(1+|\vec{p}|)^{-2}$ und h ist daher quadratintegrabel, d.h. $h \in \mathcal{H}_+$ und $h \otimes \Phi^{(n,r)} \in L^2(\mathbb{R}^3, d\vec{p})^{2^{\otimes(n+1+r)}}$. Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in diesem Raum und dann in $l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ rechtfertigt die folgenden Abschätzungen für die Majorante:

$$\sum_{n,r}^{\infty}\sum_{\alpha_1\ldots\beta_r}\sum_{i=1}^{2}\int d\vec{p}_1..d\vec{q}_r\int d\vec{p}\,h^i(\vec{p})|\Phi^{(n,r)}\,(\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,|\cdot|\tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}\,(\vec{p},i,\vec{p}_1,\alpha_1..\vec{q}_r,\beta_r)\,|$$

$$\leq \sum_{n,r}^{\infty}\|h\otimes\Phi^{(n,r)}\|_{L^2(R^3,d\vec{p})^{2^{\otimes(n+1+r)}}}\|\tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}\|_{\mathcal{F}^{(n+1,r)}}$$

$$= \sum_{n,r}^{\infty}\|h\|_{\mathcal{H}_+}\|\Phi^{(n,r)}\|_{\mathcal{F}^{(n,r)}}\|\tilde{\mathcal{X}}^{(n+1,r)}\|_{\mathcal{F}^{(n+1,r)}}$$

$$\leq \|h\|_{\mathcal{H}_+}\|\Phi\|_{\mathcal{F}}\|\tilde{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{F}}$$

$$\leq \|\frac{1}{\sqrt{m}}(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)}f\|_{\mathcal{H}_+}\|\Phi\|_{\mathcal{F}}\|(1+H_0)^{(k+5/2)}\mathcal{X}\|_{\mathcal{F}}$$

Dabei wurden die positiven Terme $\|\tilde{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{F}^{(0,r)}}$ addiert und die ürsprünglichen Größen eingesetzt. Die Wirkung von $\hat{h}_0$ auf Elementen aus $\mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^2$ ist zu verstehen als $[\hat{h}_0 f]^i(\vec{p}) := E_p f^i(\vec{p})$. Die Größen in der letzten Zeile sind alle endlich und der Beweis, daß $\hat{a}(f)$ wohldefiniert ist, ist damit erbracht. Analog verfährt man mit $\hat{b}^*(g)$. ■

Definition 3: Sei $v \in \mathcal{P}^k\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ und $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{k+5/2}$, so definiert man für v eine Sesquilinearform durch

$$\langle\Phi|\hat{\mathbf{\Phi}}(v)|\mathcal{X}\rangle := \langle\Phi|\hat{a}(\hat{P}_+v)|\mathcal{X}\rangle + \langle\Phi|\hat{b}^*(\overline{\hat{P}_-v})|\mathcal{X}\rangle \tag{40}$$

Für $k \leq -2$ gilt wegen Lemma 2

$$\langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}}(v) | \mathcal{X} \rangle = (\Phi, \mathbf{\Phi}(v)\mathcal{X}) \tag{41}$$

Bemerkung: Mit der letzten Definition und Lemma 2 hat man also nun Feldoperatoren als Sesquilinearformen definiert, die mit Ruijsenaars Operatoren in Matrixelementen übereinstimmen, wenn man Testfunktionen mit quadratischen Abfallverhalten in $\vec{p}$ einsetzt. Zusätzlich kann man nun aber auch lediglich beschränkte stetige Testfunktionen zulassen, wenn man dafür den Definitionsbereich der Sesquilinearformen auf $D_{H_0}^{5/2}$ einschränkt. Dies wird bei der Definition des Feldes am Punkt dann ausgenutzt.

Lemma 3: Die Normen auf den Einteilchenräumen $\mathcal{H}_\pm$ und den Räumen $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ lassen sich wie folgt gegeneinander abschätzen.

$$\|(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)} f\|_{\mathcal{H}_\pm} \leq \text{const}\|f\|_k, \quad \forall f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^2 \tag{42}$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)$, dann ist $(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)} f \in \mathcal{H}_\pm$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\|(1+\hat{h}_0)^{-(k+2)} f\|^2_{\mathcal{H}_\pm} &= \int \left|(1+E_p)^{-(k+2)} f(\vec{p})\right|^2 d\vec{p} \\
&= \int (1+E_p)^{-2k-4} |f(\vec{p})|^2 d\vec{p} \\
&\leq \int (1+E_p)^{-2k-4} (1+|\vec{p}|)^{2k} \|f\|_k^2 d\vec{p} \\
&\leq \text{const}\|f\|_k^2
\end{aligned}$$

■

Achtung: die Datei lphistet.tex fehlt!

Achtung: die Datei bphistet.tex fehlt!

3.2 Verallgemeinerung des Zeitentwicklungsoperators

Lemma 4: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert $\hat{V}(t) : \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4 \to \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ einen – in t normstetigen – beschränkten linearen Operator mittels

$$\left[\hat{V}(t) f\right]^i_\epsilon (\vec{p}) := \sum_{i',\epsilon'} \int d\vec{p}\,' \mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}\,') f^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,'), \quad f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4 \tag{43}$$

($\tilde{V}(t,\vec{p})$ ist die partielle Fouriertransformierte von $V(t,\vec{x})$) mit dem Integralkern

$$\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}\,') := (2\pi)^{-3/2} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2} \underbrace{\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p}) \cdot \tilde{V}(t, \epsilon\vec{p} - \epsilon'\vec{p}\,') \cdot w^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')}_{\text{Vektor}\cdot\text{Matrix}\cdot\text{Vektor}} \tag{44}$$

Es existiert eine feste, nur vom Potential und von k abhängige Konstante c_k, so daß gilt

$$\|\hat{V}(t)\|_k \leq \frac{c_k}{1+t^2} \tag{45}$$

Beweis: Als erstes wird der Integralkern abgeschätzt.

$$\left|\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}')\right| = \left|(2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2}\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p})\cdot\tilde{V}(t,\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}')\cdot w^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}')\right|$$

(Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{C}^4$ $|(x,Ay)| \leq ||x||\cdot||Ay||$ und $||Ay|| \leq ||A||\cdot||y||$ anwenden)

$$\leq (2\pi)^{-3/2}\left\|\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p})\right\|\cdot\left\|\tilde{V}(t,\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}')\right\|\cdot\left\|\left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2}w^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}')\right\|$$

$||\cdot||$ bezeichnet die euklidische Norm auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^4$. Es gilt

$$\left\|\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}w^i_\epsilon(\vec{p})\right\| = 1$$

Also kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\left|\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}')\right| \leq \left\|(2\pi)^{-3/2}\tilde{V}(t,\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}')\right\|$$

Da die Fouriertransformation $\mathcal{S}$ in sich abbildet, kann jede Komponente von $\tilde{V}$ für sich durch ein Polynom der Form $\frac{\text{const}}{(1+t^2)(1+|\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}'|)^l}$, $l \in \mathbb{N}$, abgeschätzt werden, und man kann eine Konstante $\tilde{c}_l$ finden, so daß letztendlich für den Integralkern gilt

$$\left|\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}')\right| \leq \frac{\tilde{c}_l}{1+t^2}\frac{1}{(1+|\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}'|)^l}$$

Es sei $f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$. Mit dieser Abschätzung bestimmt man dann das Abfallverhalten von $[\hat{V}f]^i_\epsilon(\vec{p})$ in $\vec{p}$. Wähle $l = |k|+4$, dann gilt

$$\left|\left[\hat{V}(t)f\right]^i_\epsilon(\vec{p})\right| \leq \sum_{i',\epsilon'}\int d\vec{p}'\,\frac{\tilde{c}_{|k|+4}}{1+t^2}\frac{1}{(1+|\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}'|)^{|k|+4}}\|f\|_k\,(1+|\vec{p}'|)^k$$

Mit Lemma 33 folgt ($\jmath$ ist dort definiert)

$$\left|\left[\hat{V}(t)f\right]^i_\epsilon(\vec{p})\right| \leq \frac{4\jmath\tilde{c}_{|k|+4}}{1+t^2}(1+|\vec{p}|)^k\,\|f\|_k$$

Da diese Ungleichung auch noch bei Supremumbildung über $\vec{p}$ gilt, folgt

$$\|\hat{V}(t)f\|_k \leq \frac{4\jmath\tilde{c}_{|k|+4}}{1+t^2}\|f\|_k$$

Damit ist mit $c_k := 4\jmath\tilde{c}_{|k|+4}$ auch die Abschätzung für die Norm bewiesen. $[\hat{V}(t)f]^i_\epsilon(\vec{p})$ ist in $\vec{p}$ stetig, da es sich hier um eine Faltung einer stetigen Funktion mit einer Funktion aus $\mathcal{S}$ handelt.

Es bleibt die Normstetigkeit in t zu zeigen. Da $\tilde{V}(t,\vec{p}) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^{16}$ ist, kann man für alle $l \in \mathbb{N}$ eine Konstante e_l finden, so daß folgende Aussage gültig ist:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $\delta > 0$ so daß für alle $|t-t'| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}') - \mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t',\vec{p},\vec{p}')\right| &\leq (2\pi)^{-3/2}\|\tilde{V}(t,\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}') - \tilde{V}(t',\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}')\|_{C^{(4,4)}} \\ &< \varepsilon\frac{(2\pi)^{-3/2}e_l}{(1+|\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}'|)^l} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left|\left[\left(\hat{V}(t)-\hat{V}(t')\right)f\right]^i_\epsilon(\vec{p})\right| \leq \varepsilon(2\pi)^{-3/2}\sum_{i',\epsilon'}\int d\vec{p}'\,\frac{e_{|k|+4}}{(1+|\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}'|)^{|k|+4}}(1+|\vec{p}'|)^k\|f\|_k$$

(Lemma 33)

$$\leq \varepsilon(2\pi)^{-3/2}4\jmath e_{|k|+4}(1+|\vec{p}|)^k\|f\|_k$$

Damit ist die Normstetigkeit in t gezeigt. ■

Lemma 5: Die folgenden Größen definieren für alle $k \in \mathbb{Z}$ beschränkte lineare Operatoren auf $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ und sind in t normstetig:

$$\hat{O}(t) := e^{i\hat{h}_0 t}\hat{V}(t)e^{-i\hat{h}_0 t} \tag{46}$$

$$\hat{R}^{(0)\,*}(t,-\infty) := I \tag{47}$$

$$\hat{R}^{(n+1)\,*}(t,-\infty) := -i\int_{-\infty}^{t} dt'\,\hat{R}^{(n)\,*}(t',-\infty)\hat{O}(t'), \quad n \in \mathbb{N} \tag{48}$$

$$\hat{U}^*(t,-\infty) := \sum_{n=0}^{\infty}\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty) \tag{49}$$

Man hat die folgenden Schranken für die Operatornormen, wobei die Konstanten c_k und d_k nur vom äußeren Potential und von k abhängen.

$$\|\hat{O}(t)\|_k \leq \frac{c_k}{1+t^2} \tag{50}$$

$$\|\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)\|_k \leq {c_k}^n\int_{-\infty}^{t}dt_1..\int_{-\infty}^{t_n-1}dt_n\frac{1}{1+{t_1}^2}..\frac{1}{1+{t_n}^2} \tag{51}$$

$$\leq \frac{{d_k}^n}{n!} \tag{52}$$

$$\|\hat{U}^*(t,-\infty)\|_k \leq e^{d_k} \tag{53}$$

Beweis: 1. $\hat{O}(t)$

Sei $f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$, dann gilt

$$\left[\hat{O}(t)f\right]^i_\epsilon(\vec{p}) = \sum_{i',\epsilon'} \int d\vec{p}' e^{i(\epsilon E_p - \epsilon' E_{p'})t} \mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}') f^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}'), \quad f \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4 \tag{54}$$

Die Behauptungen für $\hat{O}(t)$ beweist man wie die für $\hat{V}(t)$ im vorhergehenden Lemma, wenn man beachtet, daß

$$e^{i(\epsilon E_p - \epsilon' E_{p'})t} \tilde{V}(t, \epsilon\vec{p} - \epsilon'\vec{p}') \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^{16}$$

da $\mathcal{S}$ ein Ideal für die beschränkten, glatten Funktionen ist, deren Ableitungen höchstens polynomial anwächsen.

2. ${\hat{R}^{(n)}}^*(t,-\infty)$

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt. Der Fall $n = 0$ ist klar. Die Behauptung sei also nun bis zu einem festen n bewiesen. Da der Integrand in der Rekursionsformel für ${\hat{R}^{(n+1)}}^*(t,-\infty)$ nach Induktionsannahme in t normstetig ist und die integrierbare Majorante

$$\| {\hat{R}^{(n)}}^*(t,-\infty)\hat{O}(t)\|_k \le \frac{{d_k}^n}{n!} \frac{c_k}{1+t^2}$$

besitzt, ist das Riemannintegral in t und damit ${\hat{R}^{(n+1)}}^*(t,-\infty)$ wohldefiniert. Für die Normabschätzung gilt unter Verwendung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\| {\hat{R}^{(n+1)}}^*(t,-\infty)\|_k &\le \int_{-\infty}^t dt' \| {\hat{R}^{(n)}}^*(t',-\infty)\|_k \|\hat{O}(t')\|_k \\
&\le \int_{-\infty}^t dt' {c_k}^n \int_{-\infty}^{t'} dt_1 .. \int_{-\infty}^{t_n-1} dt_n \frac{1}{1+{t_1}^2} .. \frac{1}{1+{t_n}^2} \frac{c_k}{1+t'^2} \\
&\le {c_k}^{n+1} \int_{-\infty}^t dt_1 .. \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n+1} \frac{1}{1+{t_1}^2} .. \frac{1}{1+{t_{n+1}}^2} \\
&\le \frac{{c_k}^{n+1}}{(n+1)!} \int_{-\infty}^t dt_1 .. \int_{-\infty}^t dt_{n+1} \frac{1}{1+{t_1}^2} .. \frac{1}{1+{t_{n+1}}^2} \\
&\le \frac{{c_k}^{n+1}}{(n+1)!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t'^2} dt' \right)^{n+1} \\
&\le \frac{{d_k}^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

wobei die Symmetrie in den t_i-Integrationen ausgenutzt wurde, um überall als obere Integrationsgrenze t zu haben, was den Faktor $\frac{1}{(n+1)!}$ bewirkt; und es ist $d_k := c_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Die Stetigkeit in t folgt aus

$$\| {\hat{R}^{(n+1)}}^*(t,-\infty) - {\hat{R}^{(n+1)}}^*(t',-\infty)\|_k \le \int_{t'}^t dt_1 \| {\hat{R}^{(n)}}^*(t_1,-\infty)\|_k \, \|\hat{O}(t_1)\|_k$$

$$\leq \int_{t'}^{t} dt_1 \frac{{d_k}^n}{n!} \frac{c_k}{1+{t_1}^2}$$

$$\leq \frac{c_k {d_k}^n}{n!} |t-t'|$$

3. $\hat{U}^*(t,-\infty)$

$\hat{U}^*(t,-\infty)$ ist (in t gleichmäßiger) Normlimes von beschränkten Operatoren auf $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ und als Schranke für die Norm hat man die Exponentialreihe für e^{d_k}. Die Familie $\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)$ ist in t gleichstetig, daher ist auch $\hat{U}^*(t,-\infty)$ in t normstetig, oder explizit

$$\begin{aligned}
\|\hat{U}^*(t,-\infty)-\hat{U}^*(t',-\infty)\|_k &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\,\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)-\,\hat{R}^{(n)\,*}(t',-\infty)\|_k \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_k {d_k}^{(n-1)}}{(n-1)!}|t-t'| \\
&\leq c_k e^{d_k}|t-t'|
\end{aligned}$$

■

Achtung: die Datei ludiff.tex fehlt!

Beweis: Die Rekursionsformel für $\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)$ liefert

$$\begin{aligned}
\partial_t\,\hat{R}^{(n+1)\,*}(t,-\infty) &= \partial_t(-i)\int_{-\infty}^{t} \hat{R}^{(n)\,*}(t',-\infty)\hat{O}(t')dt' \\
&= -i\,\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)\hat{O}(t)
\end{aligned}$$

Für die Normabschätzung hat man dann

$$\begin{aligned}
\|\partial_t\,\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)\|_k &\leq \frac{{d_k}^{n-1}}{(n-1)!}\frac{c_k}{1+t^2} \\
&\leq \frac{c_k {d_k}^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

$$\partial_t \hat{U}^*(t,-\infty) = \partial_t \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)$$

(Umindizieren, $\partial_t I = 0$)

$$= \partial_t \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}^{(n+1)\,*}(t,-\infty)$$

(die Summe konvergiert gleichmäßig in t, die Ableitungen der einzelnen Summanden lassen sich, wie oben angegeben, in der Norm abschätzen, sind in t normstetig und auch ihre Summe konvergiert gleichmäßig; daher kann die Ableitung in die Summe gezogen werden)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t \, \hat{R}^{(n+1)\,*}(t,-\infty)$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)\hat{O}(t)$$

$$= -i\hat{U}^*(t,-\infty)\hat{O}(t)$$

■

3.3 Beziehungen zu Größen von Ruijsenaars

Lemma 6: Die in Lemma 4 und 5 definierten Operatoren $\hat{V}(t)$, $\hat{O}(t)$, $\hat{R}^{(n)\,*}(t,-\infty)$ und $\hat{U}^*(t,-\infty)$ stimmen, wenn man $\mathcal{P}^{-2}\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ als dicht in $\mathcal{H}$ eingebettet auffaßt, dort mit den gleichnamigen – in Kapitel 2.2 ohne Hut definierten – Operatoren überein.

Beweis: Man rechnet explizit die Übereinstimmung von $V(t)$ und $\hat{V}(t)$ auf der dichten Teilmenge $\mathcal{P}^{-2}\big(\mathbb{R}^3\big)^4 \subset \mathcal{H}$ nach. Sei $f \in \mathcal{P}^{-2}\big(\mathbb{R}^3\big)^4$, dann gilt

$$[V(t)f]^i_\epsilon(\vec{p}) = [W^{-1}\check{V}(t,\cdot)Wf]^i_\epsilon(\vec{p})$$

$$= \sum_{i',\epsilon'} \int d\vec{p}\,'(2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2}(2\pi)^{-3/2}\int d\vec{x} e^{-i(\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}\,')\cdot\vec{x}}\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p})\cdot\check{V}(t,\vec{x})\cdot w^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')f^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')$$

$$= \sum_{i',\epsilon'} \int d\vec{p}\,'(2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2}\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p})\cdot\tilde{V}(t,\epsilon\vec{p}-\epsilon'\vec{p}\,')\cdot w^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')f^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')$$

$$= \sum_{i',\epsilon'} \int d\vec{p}\,'\mathcal{V}^{ii'}_{\epsilon\epsilon'}(t,\vec{p},\vec{p}\,')f^{i'}_{\epsilon'}(\vec{p}\,')$$

$$= \left[\hat{V}(t)f\right]^i_\epsilon(\vec{p})$$

$V(t)$ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$, und daher eindeutiger Abschluß von $\hat{V}(t)$.

Die übrigen Operatoren sind über $V(t)$ bzw. $\hat{V}(t)$ in gleicher Weise unabhängig vom zugrundeliegenden Raum über Operatorgleichungen definiert und stimmen daher im Abschluß miteinander überein. ■

Definition 4:

$$\tau^i_\epsilon(\vec{p},t,\vec{x}) := (2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\overline{w}^i_\epsilon(\vec{p})e^{i\epsilon E_p t}e^{-i\epsilon\vec{p}\cdot\vec{x}} \in \mathcal{P}^0\big(R^3\big)^4$$

τ ist die W^{-1}-Fouriertransformierte einer Deltafunktion und trägt Spinorindizes, formal gilt $\tau(\cdot,t,\vec{x})_\alpha = W^{-1}\delta^\alpha_{t,\vec{x}}$. τ ist offensichtlich in $\vec{p}$ und $\vec{x}$ stetig und es gilt $|\tau^i_\epsilon(\vec{p},t,\vec{x})_\alpha| \leq (2\pi)^{-3/2} \quad \forall i,\epsilon,\vec{p},t,\vec{x},\alpha,$

Achtung: die Datei ltaustet.tex fehlt!

Beweis: Aus der Definition von τ folgt

$$(2\pi)^{3/2}|\tau^i_\epsilon(\vec{p},x^0,\vec{x})_\alpha - \tau^i_\epsilon(\vec{p},y^0,\vec{y})_\alpha| \leq \left|e^{i\epsilon E_p x^0}e^{-i\epsilon\vec{p}\vec{x}} - e^{i\epsilon E_p y^0}e^{-i\epsilon\vec{p}\vec{y}}\right|$$

$$\leq \left|e^{i\epsilon E_p x^0} - e^{i\epsilon E_p y^0}\right| + \sum_{k=1}^{3}\left|e^{-i\epsilon p^k x^k} - e^{-i\epsilon p^k y^k}\right|$$

$$\leq \left|1 - e^{i\epsilon E_p (y^0-x^0)}\right| + \sum_{k=1}^{3}\left|1 - e^{-i\epsilon p^k (y^k-x^k)}\right|$$

(nach dem Mittelwertsatz gilt: $\exists z \in [0,x]$ mit $(1-e^{iax}) = -iaxe^{iaz}$)

$$\leq \left(E_p|x^0-y^0| + \sum_{k=1}^{3}|p^k|\,|x^k-y^k|\right)$$

Da sich E_p für große $\vec{p}$ wie $|\vec{p}|$ verhält, bedeutet das

$$\|\tau^i_\epsilon(\vec{p},x^0,\vec{x})_\alpha - \tau^i_\epsilon(\vec{p},y^0,\vec{y})_\alpha\|_1 \leq \text{const}\|x-y\|_{R^4}$$

■

Lemma 7: Sei $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ und

$$[\mathcal{G}(F)]^i_\epsilon(\vec{p}) := \int dt\, d\vec{x}[\hat{U}^*(t,-\infty)\tau(\cdot,t,\vec{x})]^i_\epsilon(\vec{p}) \cdot F(t,\vec{x}) \tag{55}$$

Dann gilt

1. $$\mathcal{G}(F) \in \mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{56}$$

2. $$[\mathcal{G}(F)]^i_\epsilon(\vec{p}) = [\int dt U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}F(t,\cdot)]^i_\epsilon(\vec{p}) \tag{57}$$

Beweis: zu 1.: Sei $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$.

$$\int d\vec{x}\tau^i_\epsilon(\vec{p},t,\vec{x}) \cdot F(t,\vec{x})$$

$$= e^{i\epsilon E_p t}(2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\overline{w}_\epsilon^i(\vec{p})\cdot\int d\vec{x}e^{-i\epsilon\vec{p}\cdot\vec{x}}F(t,\vec{x})$$

$$= \underbrace{e^{i\epsilon E_p t}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2}\overline{w}_\epsilon^i(\vec{p})}_{\text{beschränkt \& glatt}}\cdot\tilde{F}(t,\epsilon\vec{p})\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$$

$\tilde{F}(t,\vec{p})$ bezeichnet die partielle Fouriertransformierte von F in den Ortskoordinaten. Es ist $\tilde{F}\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, da die Fouriertransformation $\mathcal{S}$ in sich abbildet. $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ ist ein Ideal für die beschränkten, glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ mit vier Komponenten, deren Ableitungen höchstens polynomial anwachsen. Daher ist der ganze Ausdruck ein Element von $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$. Man kann also Konstanten μ_k finden, so daß gilt

$$|\int d\vec{x}\tau_\epsilon^i(\vec{p},t,\vec{x})\cdot F(t,\vec{x})|\le\mu_k(1+|\vec{p}|)^k\frac{1}{1+t^2}\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

d.h.

$$\|\int d\vec{x}\tau_\epsilon^i(\vec{p},t,\vec{x})\cdot F(t,\vec{x})\|_k\le\mu_k\frac{1}{1+t^2}\quad\forall k\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R}$$

Da $\hat{U}^*(t,-\infty)$ den Banachraum $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ nach Lemma 5 stetig in sich abbildet und normstetig in t ist, kann man $\hat{U}^*(t,-\infty)$ anwenden und über t integrieren, ohne $\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ zu verlassen:

$$\int dt\hat{U}^*(t,-\infty)\int d\vec{x}\tau(\cdot,t,\vec{x})\cdot F(t,\vec{x})\in\mathcal{P}^k\left(\mathbb{R}^3\right)^4\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

zu 2.: Unter Verwendung der Definitionen von W^{-1} und h_0, sieht man

$$\int d\vec{x}\tau_\epsilon^i(\vec{p},t,\vec{x})\cdot F(t,\vec{x})=\left[e^{ih_0t}W^{-1}F(t,\cdot)\right]_\epsilon^i(\vec{p})$$

Auf $\mathcal{P}^{-2}\left(\mathbb{R}^3\right)^4\subset\mathcal{H}$ stimmen nach Lemma 6 $\hat{U}^*(t,-\infty)$ und $U^*(t,-\infty)$ miteinander überein und es folgt

$$\int dt\hat{U}^*(t,-\infty)\int d\vec{x}\tau(\cdot,t,\vec{x})\cdot F(t,\vec{x})=\int dtU^*(t,-\infty)e^{ih_0t}W^{-1}F(t,\cdot)$$

Die $\vec{x}$-Integration läßt sich wegen der Stetigkeit von $(t,\vec{x})\mapsto\tau(\cdot,t,\vec{x})$ in $\|\cdot\|_1$ (Lemma **??**) vor den Operator $\hat{U}^*(t,-\infty)$ ziehen. Damit sind die Behauptungen bewiesen. ■

Achtung: die Datei lpsi.tex fehlt!

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Definition des ausgeschmierten Feldes über die Feldoperatoren $\mathbf{\Phi}(v)$ in Gleichung (25): $\Psi^{\text{int}}(F)=\mathbf{\Phi}(\mathcal{G}(\overline{F}))$ und der Übereinstimmung von Operator und Sesquilinearform laut Definition 3, da nach Lemma 7 $\mathcal{G}(\overline{F})\in\mathcal{P}^{-2}\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ ist. ■

Achtung: die Datei lgdicht.tex fehlt!

Beweis: Sei $g \in \mathcal{H}$, $f := WU(0,-\infty)g \in \check{\mathcal{H}}$. Wähle eine Folge $(f_n) \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ so, daß $\|f_n - f\|_{\check{\mathcal{H}}} < \epsilon$ für alle $n > n_0(\epsilon)$, was immer möglich ist, da $\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ dicht in $\check{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}^3, d\vec{x})^4$ ist. Wähle eine Folge h_n in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, die die Deltafunktion approximiert,

$$\left|\int h_n(t)u(t)dt - u(0)\right| \to 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$$

$$h_n(t) \geq 0, \quad \int h_n(t)dt = 1$$

Dann ist $F_n(t,\vec{x}) := h_n(t) \cdot f_n(\vec{x}) \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ und es gilt

$$\|\mathcal{G}(F_n) - g\|_{\mathcal{H}}$$

$$= \|\int U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}F_n(t,\cdot)dt - U^*(0,-\infty)W^{-1}f\|$$

(einsetzen von $F_n = h_n \cdot f_n$)

$$= \|\int h_n(t)U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f_n dt - U^*(0,-\infty)W^{-1}f \underbrace{\int h_n(t)dt}_{=1}\|$$

$$= \|\int h_n(t)\left(U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f_n - U^*(0,-\infty)W^{-1}f\right)dt\|$$

$$\leq \int h_n(t)\|U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f_n - U^*(0,-\infty)W^{-1}f\|dt$$

(Addieren und Wiederabziehen von $U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f$)

$$\leq \int h_n(t)\|U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f_n - U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f\|dt$$

$$+ \int h_n(t)\|U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t}W^{-1}f - U^*(0,-\infty)W^{-1}f\|dt$$

$$\leq \int h_n(t)dt\|f_n - f\|_{\check{\mathcal{H}}} + \int h_n(t)\|(U^*(t,-\infty)e^{ih_0 t} - U^*(0,-\infty))W^{-1}f\|dt$$

Für $n \to \infty$ geht der erste Term wegen $f_n \to f$ gegen Null. Der zweite verschwindet, da $U^*(t,-\infty)$ normstetig in t ist und h_n gegen die Deltafunktion strebt. Jedes $g \in \mathcal{H}$ läßt sich also durch eine Folge in $\mathcal{G}(\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4)$ approximieren. Dieser Raum liegt damit dicht in $\mathcal{H}$. ■

Bemerkung: Aus diesem Lemma folgt, daß der Vakuumvektor, da er für $\mathbf{\Phi}(v)$ trivialerweise zyklisch ist, auch zyklisch für $\Psi^{\text{int}}(F)$ ist, denn das ausgeschmierte Feld ist normstetig und es gilt $\Psi^{\text{int}}(F) = \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}(\overline{F}))$.

3.4 Definition des Feldes am Punkt als Sesquilinearform

Nun kann das Feld am Punkt definiert werden. Rein formal wird dabei das wechselwirkende Feld mit einer Deltafunktion in $(t, \vec{x})$ „ausgeschmiert“ und in Matrixelementen ausgewertet. Aus dem Vorangegangenen folgt, daß diese formale Größe auch wohldefiniert ist, wenn man den Definitionsbereich auf Vektoren mit einem guten Energieabfallverhalten einschränkt. Die folgenden Ergebnisse kann man alle noch etwas abschwächen, damit aber auch vereinheitlichen, indem man, anstelle der angegebenen Definitionsbereiche $D^k_{H_0}$, die gemeinsame, etwas kleinere – aber immer noch dichte – Teilmenge $\mathcal{C}^\infty(H_0)$ des Fockraums $\mathcal{F}$ benutzt.

Definition 5: (das Feld am Punkt als Sesquilinearform)

Es seien $\Phi, \mathcal{X} \in D^{5/2}_{H_0}$, dann ist die folgende Sesquilinearform wegen Lemma 2 und Definition 3 wohldefiniert

$$\langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(t, \vec{x}) | \mathcal{X} \rangle := \langle \Phi | \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\hat{U}^*(t, -\infty)\tau(\cdot, t, \vec{x})) | \mathcal{X} \rangle \tag{58}$$

denn $\hat{U}^*(t, -\infty)\tau(\cdot, t, \vec{x}) \in \mathcal{P}^0\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ nach Lemma 5 und Definition 4.

4 Eigenschaften des Feldes am Punkt

Achtung: die Datei lfstetig.tex fehlt!

Beweis: Nach Lemma **??** reicht es aus, die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \hat{U}^*(x^0, -\infty)\tau(\cdot, x^0, \vec{x})$ im Raum $\mathcal{P}^1\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ zu zeigen.

Einfügen und wieder Abziehen des Terms $\hat{U}^*(x^0, -\infty)\tau(\cdot, y^0, \vec{y})$ und Dreiecksungleichung liefert die folgende Ungleichung:

$$\|\hat{U}^*(x^0, -\infty)\tau(\cdot, x^0, \vec{x}) - \hat{U}^*(y^0, -\infty)\tau(\cdot, y^0, \vec{y})\|_1$$

$$\leq \|\hat{U}^*(x^0, -\infty)\left(\tau(\cdot, x^0, \vec{x}) - \tau(\cdot, y^0, \vec{y})\right)\|_1 + \|\Big(\hat{U}^*(x^0, -\infty) - \hat{U}^*(y^0, -\infty)\Big)\,\tau(\cdot, y^0, \vec{y})\|_1$$

Aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto \hat{U}^*(t, -\infty)f$ (Lemma 5) und da $\tau(\cdot, x^0, \vec{x}) \in \mathcal{P}^0\big(\mathbb{R}^3\big)^4$ ist, geht der zweite Term für $x \to y$ in $\|\cdot\|_0$ gegen Null, und damit erst recht in $\|\cdot\|_1$. Der erste Term geht wegen der Stetigkeit von $x \mapsto \tau(\cdot, t, \vec{x})$ in $\|\cdot\|_1$ gegen Null (Lemma **??**). ■

Das folgende Lemma zeigt, daß die Bezeichnung „Feld am Punkt“ für die oben definierte Sesquilinearform gerechtfertigt ist.

Lemma 8: Es sei $\Phi, \mathcal{X} \in D^{7/2}_{H_0}$, $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, dann gilt

$$\int d^4x F(x) \cdot \langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle = \big(\Phi, \Psi^{\text{int}}(F)\mathcal{X}\big) \tag{59}$$

Man erhält also das ausgeschmierte Feld zurück, wenn man das Feld am Punkt mit einer Testfunktion „testet“.

Beweis:

$$\left(\Phi, \Psi^{\text{int}}(F)\mathcal{X}\right)$$

(Lemma **??**)

$$= \langle\Phi|\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{G}(\overline{F}))|\mathcal{X}\rangle$$

(Lemma 7)

$$= \langle\Phi|\hat{\mathbf{\Phi}}\left(\int d^4x \hat{U}^*(t,-\infty)\tau(\cdot,t,\vec{x})\cdot\overline{F}(x)\right)|\mathcal{X}\rangle$$

(das Integral $\int d^4x \hat{U}^*(t,-\infty)\tau(\cdot,t,\vec{x})\cdot\overline{F}(x)$ existiert für endliche Integrationsgrenzen im Riemann-Sinne, wobei die einzelnen Riemannsummen in $\mathcal{P}^1\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ sind; der Übergang zum uneigentlichen Integral über ganz $\mathbb{R}^4$ ist auch in $\mathcal{P}^1\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ als Limes über wachsende Integrationsgrenzen durchführbar; wegen der Linearität und der Stetigkeit von $v \mapsto \langle\Phi|\hat{\mathbf{\Phi}}(v)|\mathcal{X}\rangle$, kann daher die Integration aus der Sesquilinearform herausgezogen werden, wenn, wie gefordert, $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{7/2}$ ist)

$$= \int d^4x F(x)\cdot\langle\Phi|\hat{\mathbf{\Phi}}\left(\hat{U}^*(t,-\infty)\tau(\cdot,t,\vec{x})\right)|\mathcal{X}\rangle$$

(Definition 5)

$$= \int d^4x F(x)\cdot\langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle$$

■

Das nächste Lemma ist die Umkehrung von Lemma 8 und zeigt, wie man das Feld am Punkt als Limes des ausgeschmierten Feldes erhält, wenn man den Träger der Testfunktionen auf einen Punkt schrumpfen läßt.

Lemma 9: Es sei $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{7/2}$, $\{F_n\} \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ approximiere eine Deltafunktion, $F_n \to \delta^{\alpha}_{t,\vec{x}}$, etwa $F_n(x')_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} n^4 f(n(x-x'))$, dabei sei $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right))$ positiv mit $\int f(x)d^4x = 1$, dann gilt

$$\left(\Phi, \Psi^{\text{int}}(F_n)\mathcal{X}\right) \to \langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)_\alpha|\mathcal{X}\rangle \tag{60}$$

Achtung: die Datei bdelta.tex fehlt!

Als nächstes wird gezeigt, daß man das Feld am Punkt auch differenzieren kann. Das kann in manchen Anwendungen ein Vorteil gegenüber dem Arbeiten mit Wightmanfeldern sein. An dieser Stelle sieht man auch, daß der Definitionsbereich beim Ableiten um eine Potenz schrumpft.

Lemma 10: (Ableitung des Feldes am Punkt)
Es seien $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{7/2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_j \langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle &= -i \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\hat{U}^*(t, -\infty) \hat{P}_j \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle \quad j = 1, 2, 3 &(61) \\ \partial_0 \langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle &= i \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\hat{U}^*(t, -\infty) (\hat{h}_0 - \hat{O}(t)) \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle &(62) \end{aligned}$$

Für $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{9/2}$ sind die partiellen Ableitungen $x \mapsto \partial_\mu \langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle$ stetig.

Beweis: Die zeit- und die raumartigen Ableitungen von τ kann man direkt aus der Definition von τ ablesen, da die Raum-Zeit-Koordinaten nur in Exponentialfaktoren auftauchen.

$$\begin{aligned} \partial_j \tau(\cdot, t, \vec{x}) &= -i \hat{P}_j \tau(\cdot, t, \vec{x}) \in \mathcal{P}^1 \left(\mathbb{R}^3 \right)^4 \\ \partial_t \tau(\cdot, t, \vec{x}) &= i \hat{h}_0 \tau(\cdot, t, \vec{x}) \end{aligned}$$

Sie liegen in $\mathcal{P}^1 \left(\mathbb{R}^3 \right)^4$ und die Abbildungen $x \mapsto \hat{P}_j \tau(\cdot, t, \vec{x})$ und $x \mapsto \hat{h}_0 \tau(\cdot, t, \vec{x})$ sind in $\mathcal{P}^2 \left(\mathbb{R}^3 \right)^4$ stetig, da $\hat{P}_j$ und $\hat{h}_0$ stetige Operatoren von $\mathcal{P}^k \left(\mathbb{R}^3 \right)^4$ nach $\mathcal{P}^{k+1} \left(\mathbb{R}^3 \right)^4$ sind.
Als erstes werden jetzt die raumartigen Ableitungen des Feldes am Punkt betrachtet.

$$\langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\hat{U}^*(t, -\infty) (-i \hat{P}_j) \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle$$

(Ableitung von τ einsetzen)

$$= \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\hat{U}^*(t, -\infty) \partial_j \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle$$

(Lemma 5: Stetigkeit von $f \mapsto \hat{U}^*(t, -\infty) f$)

$$= \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\partial_j \hat{U}^*(t, -\infty) \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle$$

(Lemma **??**: Stetigkeit von $v \mapsto \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}}(v) | \mathcal{X} \rangle$)

$$= \partial_j \langle \Phi | \hat{\mathbf{\Phi}} \left(\hat{U}^*(t, -\infty) \tau(\cdot, t, \vec{x}) \right) | \mathcal{X} \rangle$$

(Definition 5: das Feld am Punkt)

$$= \partial_j \langle \Phi | \Psi^{\text{int}}(t, \vec{x}) | \mathcal{X} \rangle$$

Mit der zeitartigen Ableitung verfährt man genauso: nach Produktregel gilt, falls die einzelnen Ableitungen existieren,

$$\partial_t \hat{U}^*(t, -\infty) \tau(\cdot, t, \vec{x}) = \left(\partial_t \hat{U}^*(t, -\infty) \right) \tau(\cdot, t, \vec{x}) + \hat{U}^*(t, -\infty) \partial_t \tau(\cdot, t, \vec{x})$$

(Ableitung von $\hat{U}^*(t,-\infty)$ aus Lemma **??** und von τ einsetzen)

$$= -i\hat{U}^*(t,-\infty)\hat{O}(t)\tau(\cdot,t,\vec{x}) + i\hat{U}^*(t,-\infty)\hat{h}_0\tau(\cdot,t,\vec{x})$$

$$= i\hat{U}^*(t,-\infty)\left(\hat{h}_0 - \hat{O}(t)\right)\tau(\cdot,t,\vec{x})$$

Für die Stetigkeit der partiellen Ableitungen des Feldes braucht man die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto P_j\tau(\cdot,t,\vec{x})$. Diese ist in $\mathcal{P}^2\left(\mathbb{R}^3\right)^4$ gewährleistet, daß heißt: man muß nach Definition 3 als Definitionsbereich für die Sesquilinearform $D_{H_0}^{9/2}$ wählen. ■

Die Diracgleichung und die Lokalität sollte das Feld am Punkt natürlich auch erfüllen. Um die Beweise kurz zu halten, wird auf Ergebnisse für das ausgeschmierte Feld zurückgegriffen, die sich aber auch unabhängig von diesem Formalismus für das Feld am Punkt nocheinmal nachvollziehen ließen.

Satz 11: (Diracgleichung)
Das Feld am Punkt erfüllt die gestörte Diracgleichung im Sinne der Sesquilinearform, d.h. für alle $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{9/2}$ gilt

$$(-i\partial\!\!\!/_x + m - B(x))\,\langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle = 0 \tag{63}$$

Beweis: In [3] zeigt Ruijsenaars, daß das ausgeschmierte Feld die Diracgleichung im Sinne operatorwertiger Distributionen erfüllt, d.h. für alle $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ gilt

$$\Psi^{\text{int}}((i\partial\!\!\!/^T + m - B^T)F) = 0$$

Diese Operatorgleichung wird in Matrixelementen $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{9/2}$ ausgewertet.

$$\left(\Phi, \Psi^{\text{int}}(\left(i\partial\!\!\!/^T + m - B^T\right)F)\mathcal{X}\right) = 0$$

Mit Lemma 8 gilt

$$\int d^4x\,\left(\left(i\partial\!\!\!/_x^T + m - B^T\right)F\right)(x)\cdot\langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle = 0$$

Wegen Lemma 10 kann partiell integriert werden.

$$\int d^4xF(x)\cdot(-i\partial\!\!\!/_x + m - B(x))\,\langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle = 0$$

Setzt man für F wie im Beweis von Lemma 9 eine Deltafolge ein, so folgt die Behauptung. ■

Lemma 12: Sei A ein beschränkter Operator auf dem Fockraum mit der Eigenschaft

$$A, A^* : D_{H_0}^{7/2} \to D_{H_0}^{7/2}$$

Wenn A die Relation

$$\left[A, \Psi^{\mathrm{int}}(F)\right]_{\pm} = 0, \quad \forall F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4, \quad \mathrm{supp} F \subset \mathcal{O} \text{ offen}$$

erfüllt, dann (anti)vertauscht A mit dem Feld am Punkt im Sinne von Sesquilinearformen, d.h.

$$\langle \Phi | \Psi^{\mathrm{int}}(x) | A\mathcal{X} \rangle \pm \langle A^* \Phi | \Psi^{\mathrm{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle = 0 \tag{64}$$

für alle $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{7/2}$ und x aus $\mathcal{O}$.

Umgekehrt, wenn A mit dem Feld am Punkt für alle x in einem offenen Gebiet $\mathcal{O}$ (anti)vertauscht, so (anti)vertauscht A auch mit dem ausgeschmierten Feld $\Psi^{\mathrm{int}}(F)$, wenn $\mathrm{supp} F \subset \mathcal{O}$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Lemma 9, indem man die (Anti)kommutatorrelation für A in Matrixelementen auswertet und den Träger der Testfunktionen auf den Punkt x zusammenzieht. Dabei ist es wichtig, daß A und A^* den Definitionsbereich der Sesquilinearform invariant lassen und daß $x \in \mathcal{O}$ ist.

Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 8, indem man die (Anti)kommutatorrelation mit einer Testfunktion ausschmiert. Der Definitionsbereich der Sesquilinearform liegt dicht in $\mathcal{F}$. Somit vertauscht A mit $\Psi^{\mathrm{int}}(F)$ in Matrixelementen auf einer dichten Menge. Da es sich um beschränkte Operatoren handelt, ist die (Anti)kommutatorrelation eindeutig festgelegt. ■

Satz 13: (Lokalität)

Das Feld am Punkt erfüllt die Lokalität im Sinne von Sesquilinearformen:

Es seien $\Phi, \mathcal{X} \in D_{H_0}^{7/2}$, $G \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, $x \in (\mathrm{supp} G)'$, dann gilt

$$\langle \Phi | \Psi^{\mathrm{int}}(x) | \Psi^{\mathrm{int}}(G)^* \mathcal{X} \rangle + \langle \Psi^{\mathrm{int}}(G) \Phi | \Psi^{\mathrm{int}}(x) | \mathcal{X} \rangle = 0 \tag{65}$$

Beweis: Seien $\Phi, \mathcal{X}, G, x$ wie im Satz, $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ mit $\mathrm{supp} F \subset (\mathrm{supp} G)'$. In [3] zeigt Ruijsenaars die Lokalität für das ausgeschmierte Feld, d.h.

$$\left\{\Psi^{\mathrm{int}}(F), \Psi^{\mathrm{int}}(G)^*\right\} = 0$$

Nach Lemma **??** läßt $\Psi^{\mathrm{int}}(G)$ den Definitionsbereich $D_{H_0}^{7/2}$ invariant. Aus Lemma 12 folgt dann die Behauptung. ■

5 Gleichheit der von-Neumann-Algebren

In den vorangegangenen Kapiteln wurde das Feld am Punkt als Sesquilinearform definiert und bewiesen, daß es lokal ist, die Diracgleichung erfüllt und aus dem ausgeschmierten Feld gewonnen werden kann, indem man mit den Testfunktionen eine Deltafunktion approximiert. Hier wird nun gezeigt, wie man, ohne Testfunktionen zu verwenden, direkt über das Feld am

Punkt von-Neumann-Algebren definieren kann, die mit den üblichen, mit Hilfe des ausgeschmierten Feld definierten, Algebren übereinstimmen.

Im folgenden werden mit $\mathcal{O}$ immer offene Doppelkegel im Minkowskiraum M_4 bezeichnet und mit $\mathcal{O}\!\!\!/$ deren Basen (Kugeln). $\mathcal{M}$ steht entweder für einen Doppelkegel ($\mathcal{M} = \mathcal{O}$) oder für das kausale Komplement eines Doppelkegels ($\mathcal{M} = \mathcal{O}'$), int$\mathcal{M}$ ist das Innere von $\mathcal{M}$.

5.1 Definitionen

Definition 6: Hier wird die vom Feld am Punkt erzeugte von-Neumann-Algebra $\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ und die vom ausgeschmierten Feld erzeugte von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ definiert.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_x &:= \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : S, S^* : \mathcal{C}^\infty(H_0) \to \mathcal{C}^\infty(H_0)\,,\\
&\quad \langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|S\mathcal{X}\rangle - \langle S^*\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle = 0,\\
&\quad \langle\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|S^*\mathcal{X}\rangle - \langle S\Phi|\Psi^{\text{int}}(x)|\mathcal{X}\rangle = 0, \forall\Phi, \mathcal{X} \in \mathcal{C}^\infty(H_0)\big\} && (66)\\
\mathcal{S}(\mathcal{M}) &:= \bigcap_{x\in\mathcal{M}} \mathcal{S}_x && (67)\\
\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) &:= \mathcal{S}(\mathcal{M})' && (68)\\
\mathcal{T}(\mathcal{M}) &:= \big\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \big[T, \Psi^{\text{int}}(F)\big] = 0 = \big[T^*, \Psi^{\text{int}}(F)\big]\,,\\
&\quad \forall F \in \mathcal{C}_0^\infty\big(\mathbb{R}^4\big)^4\,, \operatorname{supp}F \subset \text{int}\mathcal{M}\big\} && (69)\\
\mathcal{R}(\mathcal{M}) &:= \mathcal{T}(\mathcal{M})' && (70)
\end{aligned}$$

Lemma 14: (Kleintransformation)

Auf $\mathcal{F}$ wird der Operator $V := e^{i\pi Q}$ definiert, Q ist der Ladungsoperator. V hat folgende Eigenschaften:

1. $V\Omega = \Omega$ (71)
2. $V\Psi^{\text{int}}(F) = -\Psi^{\text{int}}(F)V$ (72)
3. $V^2 = I, \quad V = V^*$ (73)
4. $V : \mathcal{C}^\infty(H_0) \to \mathcal{C}^\infty(H_0)$ (74)
5. V antikommutiert mit $\Psi^{\text{int}}(x)$ für alle x (75)

Beweis: Die Eigenschaften (1.)–(4.) sind offensichtlich, wenn man V auf einen Vektor aus $\mathcal{F}$ anwendet und diesen explizit hinschreibt. Im übrigen legen sie V eindeutig fest, so daß man diese Eigenschaften auch als Definition für den Kleinoperator hätte nehmen können. (5.) folgt aus (2.) und (4.) unter Anwendung von Lemma 12. ■

Der Kleinoperator V dient dazu, Operatoren mit Fermistatistik von Operatoren mit Bosestatistik zu trennen. Sei F ein beschränkter Operator auf $\mathcal{F}$, dann setze

$$F_+ := \frac{1}{2}(F + VFV) \tag{76}$$

$$F_- := \frac{1}{2}(F - VFV) \tag{77}$$

Damit gilt

$$F = F_+ + F_- \tag{78}$$
$$VF_+ = F_+V \tag{79}$$
$$VF_- = -F_-V \tag{80}$$

Mit Hilfe von V wird die Twisted von-Neumann-Algebra definiert.
Definition 7:

$$\mathcal{R}(\mathcal{M})^t := \{F_+ + iF_-V : F \in \mathcal{R}(\mathcal{M})\} \tag{81}$$

Da die Feldoperatoren, die $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ erzeugen, mit V antivertauschen (siehe Lemma 14), gilt $\Psi^{\text{int}}(F) = \Psi^{\text{int}}(F)_-$ und daher

$$\mathcal{R}(\mathcal{M})^t = \left\{V\Psi^{\text{int}}(F), V\Psi^{\text{int}}(F)^* : \text{supp}F \subset \text{int}\mathcal{M} \text{ kompakt}\right\}'' \tag{82}$$

Für die Bildung der twisted von-Neumann-Algebra kann man leicht zeigen (siehe [7])

$$\mathcal{R}(\mathcal{M})^{tt} = \mathcal{R}(\mathcal{M}) \tag{83}$$
$$\mathcal{R}(\mathcal{M})^{t'} = \mathcal{R}(\mathcal{M})'^{t} \tag{84}$$

5.2 Satz über die Gleichheit

Achtung: die Datei srr.tex fehlt!

Beweis: Der Beweis gliedert sich in drei Teilschritte, von denen die ersten beiden relativ leicht zu zeigen sind, während der letzte auf den Beweis der Twisted Dualität für das Fermifeld im äußeren Feld hinausläuft.

1. $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{O})$
2. $\tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}')^{t'}$
3. $\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \mathcal{R}(\mathcal{O}')^{t'}$

zu 1. $\mathcal{S}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{O})$ folgt aus Lemma 12, da jeder Operator, der mit dem Feld am Punkt für alle x aus einem offenen Gebiet vertauscht, auch mit dem ausgeschmierten Feld vertauscht, sofern der Träger der Testfunktion nur in diesem offenen Gebiet liegt.

Bildet man von dieser Relation die Kommutante, folgt $\mathcal{T}(\mathcal{O})' \subset \mathcal{S}(\mathcal{O})'$ und damit, nach obiger Definition, $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{R}}(\mathcal{O})$.

zu 2. Seien nun F Testfunktionen mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}'$. Nach Satz 13 und Lemma 14 antikommutieren $\Psi^{\text{int}}(F)$ und V mit dem Feld am Punkt für $x \in \mathcal{O}$, das Produkt dieser

Operatoren kommutiert also im Sinne der Sesquilinearformen: $V\Psi^{\mathrm{int}}(F) \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ Darum gilt,

$$\begin{array}{rcll} \left\{V\Psi^{\mathrm{int}}(F), V\Psi^{\mathrm{int}}(F)^* : \mathrm{supp}F \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'\right\} & \subset & \mathcal{S}(\mathcal{O}) & \\ \left\{V\Psi^{\mathrm{int}}(F), V\Psi^{\mathrm{int}}(F)^* : \mathrm{supp}F \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'\right\}'' & \subset & \mathcal{S}(\mathcal{O})'' & \\ \mathcal{R}\left(\mathcal{O}'\right)^t & \subset & \tilde{\mathcal{R}}\left(\mathcal{O}\right)' & \text{(mit Gleichung (82))} \\ \mathcal{R}\left(\mathcal{O}'\right)^{t'} & \supset & \tilde{\mathcal{R}}\left(\mathcal{O}\right)'' & \\ \mathcal{R}\left(\mathcal{O}'\right)^{t'} & \supset & \tilde{\mathcal{R}}\left(\mathcal{O}\right) & \end{array}$$

zu 3. Die Twisted Dualität $\mathcal{R}\left(\mathcal{O}\right) = \mathcal{R}\left(\mathcal{O}'\right)^{t'}$ im Fermifall ist das Gegenstück zur Dualität im Bosefall und eine stärkere Forderung als die Lokalität. Aus ihr folgt die Dualität der Observablenalgebra, d.h. Observablen, die mit allen in $\mathcal{O}'$ lokalisierten Observablen vertauschen, müssen in $\mathcal{O}$ selbst lokalisiert sein. Diese Forderung ist zum Beispiel in Theorien mit gebrochener Symmetrie nicht unbedingt erfüllt.

Im folgenden werden Ideen von Foit [7] und Dimock [8] aufgegriffen, um für das ausgeschmierte Feld die Twisted Dualität zu zeigen (vergl. Satz 31). ■

6 Twisted Dualität

Die bisherige Notation für die ausgeschmierten Felder ist, im Hinblick auf die Twisted Dualität, unpraktisch. Wie man später sieht, ist es günstiger, Felder als Operatoren auf einem Fockraum über einem Einteilchenhilbertraum K zu definieren, der eine antilineare Involution Γ trägt. Das Paar (K, Γ) nennt man einen (Fermi-)Phasenraum. Die Involution Γ hängt mit dem adjungierten Feld über die Relation $\Psi(k)^* = \Psi(\Gamma k)$ zusammen. Die adjungierten Felder werden also mit zu den Feldern gezählt.

Im folgenden wird ein solcher Phasenraum mit den zugehörigen Feldern konstruiert, indem man den Testfunktionenraum verdoppelt, den Unterraum der Lösungen der gestörten Diracgleichung abdividiert und dann mit der Antikommutatorfunktion des ausgeschmierten Feldes als Skalarprodukt vervollständigt. Dabei gewinnt man auch automatisch die gewünschte Involution. Außerdem hat man lokale Unterräume, die nach dem gleichen Prozeß aus den Testfunktionen mit Träger in einem Teilgebiet der vierdimensionalen Raum-Zeit resultieren.

Es ist möglich, den Beweis der Twisted Dualtität auf ein Problem auf der Ebene dieser lokalen Unterräume des Einteilchenraums zurückzuführen.

Da die Diracgleichung eine hyperbolische Differentialgleichung ist, sind ihre Lösungen durch Angabe von Anfangsdaten auf einer Cauchyfläche bereits eindeutig bestimmt. Dies nutzt man dazu aus, das Problem noch eine Stufe weiter auf die Ebene des Raumes der Anfangsdaten der Diracgleichung zurückzuschrauben. Dieser Raum kann durch einen dreidimensionalen Phasenraum mit einem einfachen Skalarprodukt beschrieben werden, in dem das Problem dann leicht zu lösen ist.

6.1 Konstruktion der Phasenräume: vierdimensional

Lemma 15: Sei $f \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, dann existieren Abbildungen

$$S_\pm : \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4 \to \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4 \tag{85}$$

mit

$$\not{D} S_\pm f = f = S_\pm \not{D} f, \quad \mathrm{supp} S_\pm f \subset J_\pm(\mathrm{supp} f) \tag{86}$$

Setzt man $S := S_+ - S_-$, so folgt sofort

$$\not{D} S f = 0 = S \not{D} f, \quad \mathrm{supp} S f \subset J(\mathrm{supp} f) \tag{87}$$

wobei

$$J_\pm(x) \;:=\; \left\{y : y - x \in \overline{V}_\pm\right\} \tag{88}$$

$$J_\pm(G) \;:=\; \bigcup_{x \in G} J_\pm(x) \tag{89}$$

$$J \;:=\; J_+ \cup J_- \tag{90}$$

$\overline{V}_\pm$ ist der abgeschlossene Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel im Minkowskiraum. $\not{D}$ ist der Diracoperator für das Problem mit äußerem Feld:

$$\not{D} := \left[-i\not{\partial}_x + m - B(x)\right] \tag{91}$$

S gibt einem also zu jeder Testfunktion eine Lösung der gestörten Diracgleichung.

Beweis: Dieses Lemma ist im wesentlichen eine Folge von Ergebnissen, zu denen Ruijsenaars in [2] kommt. Nach Satz (3.2) in [2] hat die gestörte Diracgleichung zweiseitige temperierte retardierte und avancierte Fundamentallösungen, die gegeben sind durch

$$\left[G_I\right](x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1..dx_n S_I(x - x_1)B(x_1)..B(x_n)S(x_n - y) \quad I = R, A$$

Dabei sind $S_I(x-y), I = R, A$ die fundamentalen avancierten und retardierten Lösungen der freien Diracgleichung und $B(x) = \gamma^0 V(x)$ das äußere Feld multipliziert mit einer γ-Matrix. Nach Ruijsenaars Gleichung (3.64) in [2] gilt

$$\left[-i\overrightarrow{\not{\partial}_x} + m - B(x)\right]\left[G_I\,(x,y)\right] = \delta(x-y) = \left[G_I\,(x,y)\right]\left[i\overleftarrow{\not{\partial}_y} + m - B(y)\right]$$

und nach (3.63) in [2]

$$\mathrm{supp}\left[G_{\substack{R\\A}}\right](x,y) \subset \left\{(x,y) : x - y \in \overline{V}_\pm\right\}$$

Nach Satz (3.2) in [2] gibt es Abbildungen $S_\pm : \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4 \to \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ mit

$$[S_\pm f](x) := \int dy \left[G_{\substack{A\\R}}\right](x,y)f(y)$$

und es folgt daher

$$S_\pm \not{D} f = f = \not{D} S_\pm f$$

Mit den Trägereigenschaften der Fundamentallösungen folgen die Behauptungen. ■

Lemma 16: Seien $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ und $\langle f, g\rangle := \int \hat{f}(x)g(x)d^4x$, $\hat{f}(x) := \overline{f}(x)\gamma^0$, dann gilt für den Antikommutator des wechselwirkenden Feldes

$$\{\Psi^{\text{int}}(\hat{f}), \Psi^{\text{int}}(\hat{g})^*\} = i\langle f, Sg\rangle \tag{92}$$

Beweis: Ruijsenaars zeigt in [3], Gleichung (2.44)

$$\left\{\Psi^{\text{int}}(f), \Psi^{\text{int}}(g)^*\right\} = (-i\,[G_R] + i\,[G_A])\left(f, \gamma^0\overline{g}\right)$$

$[G_I](f,g)$ bezeichnet die Fundamentallösung, ausgeschmiert mit zwei Testfunktionen. Also gilt

$$\begin{aligned}\left\{\Psi^{\text{int}}(\hat{f}), \Psi^{\text{int}}(\hat{g})^*\right\} &= i\left([G_A] - [G_R]\right)(\hat{f}, \gamma^0\overline{\hat{g}}) \\ &= i\int dx\, dy \hat{f}(x)\left([G_A] - [G_R]\right)(x,y)g(y) \\ &= \int dx \hat{f}(x)(Sg)(x) \\ &= i\,\langle f, Sg\rangle\end{aligned}$$

■

Definition 8: (Verdopplung des Testfunktionenraums und der Felder)
Es sei $\mathcal{T}$ der Raum der Testfunktionen mit kompaktem Träger in vier Raum-Zeitdimensionen, $\mathcal{T} := \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$. Dieser Testfunktionenraum wird verdoppelt:

$$\underline{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \times \hat{\mathcal{T}} \quad \underline{f} = \left(f_1, \hat{f}_2\right) \in \underline{\mathcal{T}} \tag{93}$$

Sei A ein Operator auf $\mathcal{T}$, dann definiert

$$\underline{A}\underline{f} := \left(Af_1, \widehat{Af_2}\right) \tag{94}$$

einen Operator auf $\underline{\mathcal{T}}$ (insbesondere ist so $\underline{\not{D}}$ zu verstehen).

Über dem verdoppelten Testfunktionenraum werden neue Felder $\mathbf{\Psi}(\cdot)$ mit Hilfe der alten $\Psi^{\text{int}}(\cdot)$ definiert. Sei $\underline{f} \in \underline{\mathcal{T}}$

$$\mathbf{\Psi}(\underline{f}) := \hat{\Psi}^{\text{int}}(f_1) + \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2) \tag{95}$$

Für Rechnungen ist die Identität $\hat{\Psi}^{\text{int}}(f) = \Psi^{\text{int}}(\hat{f})^*$ von Nutzen.

Lemma 17: Seien $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$, dann gilt

$$\left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{g})\right\} = i\langle f_1, Sg_1\rangle + i\langle g_2, Sf_2\rangle \tag{96}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{g})\right\} &= \left\{\Psi^{\text{int}}(\hat{f}_1) + \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2)^*, \Psi^{\text{int}}(\hat{g}_1)^* + \Psi^{\text{int}}(\hat{g}_2)\right\} \\
&= \left\{\Psi^{\text{int}}(\hat{f}_1), \Psi^{\text{int}}(\hat{g}_1)^*\right\} + \left\{\Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2)^*, \Psi^{\text{int}}(\hat{g}_2)\right\} \\
&= i\left\langle f_1, Sg_1\right\rangle + i\left\langle g_2, Sf_2\right\rangle
\end{aligned}$$

mit Lemma 16. ■

Definition 9: (Involution und Antikommutatorfunktion)
Seien $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$, dann definiere

$$J\underline{f} := \left(f_2, \hat{f}_1\right) \tag{97}$$

$$\sigma\left(\underline{f}, \underline{g}\right) := \left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{g})\right\} \tag{98}$$

Lemma 18: Seien $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$, dann gilt

1. $$\mathbf{\Psi}\left(J\underline{f}\right) = \mathbf{\Psi}\left(\underline{f}\right)^* \tag{99}$$
2. $$\sigma\left(J\underline{f}, J\underline{g}\right) = \sigma\left(\underline{g}, \underline{f}\right) \tag{100}$$
3. $$\mathbf{\Psi}\left(\underline{\not{D}f}\right) = 0 \tag{101}$$
4. $$\sigma\left(\underline{\not{D}f}, \underline{g}\right) = 0 = \sigma\left(\underline{f}, \underline{\not{D}g}\right) \tag{102}$$

Beweis:

1. $\mathbf{\Psi}\left(\underline{f}\right)^* = \left(\Psi^{\text{int}}(\hat{f}_1)^* + \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2)\right)^* = \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2)^* + \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_1) = \mathbf{\Psi}\left(\underline{Jf}\right)$
2. $\sigma\left(J\underline{f}, J\underline{g}\right) = \left\{\mathbf{\Psi}(J\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(J\underline{g})\right\} = \left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f}), \mathbf{\Psi}(\underline{g})^*\right\} = \left\{\mathbf{\Psi}(\underline{g})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{f})\right\} = \sigma\left(\underline{g}, \underline{f}\right)$

3. $\mathbf{\Psi}\left(\underline{\not{D}f}\right) = \Psi^{\mathrm{int}}(\widehat{\not{D}f_1})^* + \Psi^{\mathrm{int}}(\widehat{\not{D}f_2})$

Da $\hat{f} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, gilt mit Gleichung 26 (siehe [3])

$$\Psi^{\mathrm{int}}(\widehat{\not{D}f}) = \Psi^{\mathrm{int}}(\overline{(-i\not{\partial} + m - B)f}\gamma^0) = \Psi^{\mathrm{int}}((i\not{\partial}^t + m - B^t)\hat{f}) = 0$$

4. Die Behauptung folgt aus (3.) und Definition von σ. ■

Lemma 19: α sei die kanonische Quotientenabbildung

$$\alpha : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{T}}/\underline{\not{D}\mathcal{T}} \tag{103}$$

Seien $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{T}$, dann definiert

$$(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_K := \sigma(\underline{f}, \underline{g}) = i\,\langle f_1, Sg_1\rangle + i\,\langle g_2, Sf_2\rangle \tag{104}$$

ein Skalarprodukt auf dem Quotientenraum und damit durch Vervollständigung einen Hilbertraum K. Auf K wird ein antiunitärer Operator Γ_K definiert über

$$\Gamma_K\alpha(\underline{f}) := \alpha(J\underline{f})$$

Das Paar (K, Γ_K) wird als Fermiphasenraum bezeichnet.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $(\cdot,\cdot)_K$ positiv definit und eindeutig definiert ist.
1. Positivität:

$$(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{f}))_K = \sigma(\underline{f}, \underline{f}) = \left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{f})\right\} \geq 0$$

da der letzte Term eine Summe aus positiven Operatoren ist.
2. Eindeutigkeit:

$$(\alpha(\underline{\not{D}f}), \alpha(\underline{g}))_K = 0 = (\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{\not{D}g}))_K$$

da $\langle f, S\not{D}g\rangle = 0$ nach Lemma 18.
3. Definitheit: zu zeigen ist

$$(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{f}))_K = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{h} \in \underline{\mathcal{T}} \text{ mit } \underline{f} = \underline{\not{D}h}$$

Sei also $(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{f}))_K = 0$. Da die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auch für nur positiv-semidefinite Bilinearformen gilt, folgt für alle $\underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$

$$(\alpha(\underline{g}), \alpha(\underline{f}))_K{}^2 \leq (\alpha(\underline{g}), \alpha(\underline{g}))_K \cdot (\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{f}))_K = 0$$

Es genügt daher zu zeigen:

$$\langle g, Sf\rangle = 0\ \forall g \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \exists h \in \mathcal{T} \text{ mit } f = \not{D}h$$

Sei also $f \in \mathcal{T}$ mit $\langle g, Sf\rangle = 0$ für alle $g \in \mathcal{T}$, dann folgt

$$\langle g, (S_+ - S_-)f\rangle = 0$$

und wegen der Stetigkeit von $(Sf)(x)$ gilt

$$S_+ f = S_- f$$

Aufgrund der Trägereigenschaften von $S_\pm$ (siehe Lemma 15), muß supp$S_+ f$ kompakt sein, also $S_+ f \in \mathcal{T}$. Aus Lemma 15 folgt

$$\not{D} S_+ f = f$$

Wähle $h = S_+ f$, dann gilt $f = \not{D} h$. ■

Bemerkung: K hat lokale Unterräume, die mit $K(\mathcal{M})$ bezeichnet werden. $\mathcal{M}$ ist in Anwendungen entweder ein Doppelkegel oder das raumartige Komplement davon. $K(\mathcal{M})$ erhält man durch Abschluß des Bildes von

$$\underline{\mathcal{T}}(\mathcal{M}) := \left\{ \underline{f} \in \underline{\mathcal{T}} : \mathrm{supp}\underline{f} \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{M} \right\} \tag{105}$$

Definition 10: Wegen $\|\mathbf{\Psi}(\underline{f})\| \leq \|\alpha(\underline{f})\|_K$ (vergl. (145)) kann man Feldoperatoren $\Psi_K(k)$, $k \in K$, definieren durch

$$\Psi_K(\alpha(\underline{f})) := \mathbf{\Psi}(\underline{f}), \qquad \underline{f} \in \underline{\mathcal{T}} \tag{106}$$

6.2 Konstruktion der Phasenräume: Anfangsdaten

Wenn man die Twisted Dualität für eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ beweisen will, so zeichnet die Basis $\not{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ eine raumartige Hyperebene und damit auch eine Zeitachse aus.

Analog zum vierdimensional ausgeschmierten Feld kann man mit Hilfe der Felder zu fester Zeit verfahren, um einen Fermiphasenraum (L, Γ_L) zu definieren. Dieser hat die Bedeutung eines Raumes von Anfangsdaten für die gestörte Diracgleichung.

Definition 11: Als Testfunktionenraum zu fester Zeit hat man

$$\mathcal{T}_t := \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)^4 \tag{107}$$

Der Testfunktionenraum wird verdoppelt mittels

$$\underline{\mathcal{T}}_t := \mathcal{T}_t \times \hat{\mathcal{T}}_t \qquad \underline{F} = \left(F_1, \hat{F}_2\right) \in \underline{\mathcal{T}}_t \tag{108}$$

Die antilineare Involution ist

$$\Gamma_L \underline{F} = \left(F_2, \hat{F}_1\right) \tag{109}$$

Als Skalarprodukt hat man

$$(\underline{F},\underline{G})_L := (F_1,G_1)+(G_2,F_2), \quad (F,G)=\sum_{\alpha=1}^{4}\int d\vec{x}\,\overline{F}_\alpha(\vec{x})G_\alpha(\vec{x}) \tag{110}$$

L sei der Hilbertraum, den man durch Abschluß von $\underline{\mathcal{T}}_t$ erhält. Γ_L ist zum antiunitären Operator auf ganz L fortsetzbar.

Bemerkung: Man kann auch hier wieder lokale Unterräume $L(\not{\mathcal{O}}^{(C)})$ durch Abschluß von

$$\underline{\mathcal{T}}_t(\not{\mathcal{O}}^{(C)}) := \left\{\underline{F}\in\underline{\mathcal{T}}_t : \mathrm{supp}\underline{F}\subset\not{\mathcal{O}}_1\subset\not{\mathcal{O}}^{(C)}\right\} \tag{111}$$

definieren. $\not{\mathcal{O}}^C$ bezeichnet das Komplement von $\not{\mathcal{O}}$ in $\mathbb{R}^3$.

6.3 Isomorphie der Phasenräume

Definition 12: (Phasenraumisomorphismus B_t)

$$\begin{aligned}
&\rho_t:\mathcal{T}\to\mathcal{T}_t && (\rho_t f)(\vec{x}) := f(t,\vec{x})\\
&\beta_t:\mathcal{T}\to\mathcal{T}_t && \beta_t f := i\gamma^0\rho_t S f\\
&\underline{\beta}_t:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\mathcal{T}}_t && \underline{\beta}_t\underline{f} := (\beta_t f_1,\widehat{\beta_t f_2})\\
&B_t:K\to L && B_t\alpha(\underline{f}) := \alpha(\underline{\beta}_t\underline{f})
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\rho_t:\mathcal{T}(\mathcal{O})\to\mathcal{T}_t(\not{\mathcal{O}})$.

Bemerkung: Diese Definition und die folgenden drei Lemmata dienen der Vorbereitung eines Satzes über die Isomorphie lokaler Unterräume von K und L; die Beweise werden analog zu Ideen von Dimock geführt, die dieser für den Bose-Fall entwickelt hat. Es können dann Eigenschaften lokaler Unterräume von K auf Eigenschaften lokaler Unterräume von L zurückgeführt werden. Physikalisch ist dies durch die eindeutige Lösbarkeit der Diracgleichung bei gegebenen glatten Anfangsdaten mit kompaktem Träger begründet. L ist unabhängig von der Wechselwirkung und aufgrund seiner daraus resultierenden einfachen Struktur wesentlich leichter zu handhaben als K, was dann beim Beweis der Twisted Dualität ausgenutzt wird.

Lemma 20: Es seien $f,g\in\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, $\mathcal{G}\subset\mathbb{R}^4$, $\mathrm{supp}f\cap\mathcal{G}$ oder $\mathrm{supp}g\cap\mathcal{G}$ kompakt, dann gilt

$$\int_{\mathcal{G}}\left(\hat{f}(x)\left(\not{D}g\right)(x)-\left(\widehat{\not{D}f}\right)(x)g(x)\right)d^4x = i\int_{\partial\mathcal{G}}\hat{f}(x)\gamma^\mu g(x)\eta_\mu d\sigma(x) \tag{112}$$

$\partial\mathcal{G}$ ist die Oberfläche von $\mathcal{G}$ mit η_μ als Oberflächennormalen.

Beweis:

$$\int_{\mathcal{G}}\left(\hat{f}(x)\left(\left[-i\gamma^\mu\partial_\mu+m-B(x)\right]g\right)(x)-\overline{\left(\left[-i\gamma^\mu\partial_\mu+m-B(x)\right]f\right)}(x)\gamma^0 g(x)\right)d^4x$$

$(B(x) = B(x)^*)$

$$= \int_{\mathcal{G}} \left(-i\hat{f}(x)\gamma^\mu \left(\partial_\mu g\right)(x) - i \left(\partial_\mu \overline{f}\right)(x)\gamma^{\mu *}\gamma^0 g(x) \right) d^4x$$

$(\gamma^{\mu *} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, Produktregel)

$$= -i \int_{\mathcal{G}} \partial_\mu \left(\hat{f}(x)\gamma^\mu g(x) \right) d^4x$$

(Gaußscher Satz)

$$= i \int_{\partial\mathcal{G}} \hat{f}(x)\gamma^\mu g(x)\eta_\mu d\sigma(x)$$

■

Lemma 21: Sei $g \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$ mit $\not{D}g = 0$, dann gilt für alle $f' \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)^4$

$$\langle f', g \rangle = -i \int \overline{(\rho_t S f')}(\vec{x}) \left(\rho_t g\right)(\vec{x}) d\vec{x} \tag{113}$$

Beweis: Wähle $\mathcal{G} = D^+ := \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 > t\}$ und $f = S_- f'$ in Lemma 20, dann wird über ein kompaktes Gebiet integriert und es gilt einerseits wegen $\not{D}S_- f' = f'$ und $\not{D}g = 0$

$$\int_{D^+} (\widehat{S_- f'})(x)(\not{D}g)(x) - (\not{D}\widehat{S_- f'})(x)g(x)d^4x = -\int_{D^+} \hat{f}'(x)g(x)d^4x$$

und dies ist andererseits wegen Lemma 20 identisch mit

$$= i \int_{\partial D^+} (\widehat{S_- f'})(x)\gamma^\mu g(x)\eta_\mu d\sigma(x)$$

(da der Träger von f' kompakt ist, wird $S_- f'$ für genügend große, positive Zeiten verschwinden; zum Integral trägt also nur die Fläche zur Zeit $x^0 = t$ bei)

$$= -i \int_{x^0=t} (\widehat{S_- f'})(x)\gamma^0 g(x)d\sigma(x)$$

(die Integration über die Fläche kann als Integral im $\mathbb{R}^3$ ausgedrückt werden, dabei kommt noch ein Vorzeichenwechsel hinzu, der die Richtung der Flächennormalen berücksichtigt)

$$= -i \int (\rho_t \widehat{S_- f'})(x)\gamma^0(\rho_t g)(x)d\vec{x}$$

Wiederholt man diese Rechnung unter Ersetzung von S_- durch S_+ und D^+ durch D^-, so bekommt man die beiden Gleichungen

$$\int_{D^\pm} \hat{f}'(x)g(x)d^4x = \pm i \int (\rho_t \widehat{S_\mp f'})(x)\gamma^0(\rho_t g)(x)d\vec{x}$$

wobei das Vorzeichen durch die Richtung der Flächennormalen, je nach Integrationsgebiet, bestimmt wird. Addition beider Gleichungen gibt dann

$$\langle f', g\rangle = -i \int (\widehat{\rho_t S f'})(x)\gamma^0(\rho_t g)(x) d\vec{x}$$

■

Bemerkung: Aus diesem Lemma folgt die Eindeutigkeit der Lösung der gestörten Diracgleichung mit kompakten Anfangsdaten: Es seien g, g' zwei Lösungen mit $\rho_t g = \rho_t g'$, dann gilt für alle $f' \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)^4$

$$\langle f', g - g'\rangle = i \int \left(\overline{\rho_t S f'}\right)(\vec{x})\left(\rho_t(g - g')\right)(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \;\Rightarrow\; g = g'$$

Die Lösung ist also eindeutig.

Lemma 22: Sei u eine Lösung der gestörten Diracgleichung mit kompakten Anfangsdaten zur Zeit t, $\text{supp}(\rho_t u) \subset \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{N}$ offen, $\rho_t u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$. Dann gibt es zu jeder offenen Umgebung $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ von $\mathcal{N}$ ein $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)^4$ mit $\text{supp} f \subset \mathcal{O}$ und $u = Sf$.

Beweis: $\mathcal{O}$ sei eine offene Umgebung von $\mathcal{N}$. Wähle die folgende offene Überdeckung des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\pm &:= \mathcal{O} \cup \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 \gtrless t\} \\ \mathcal{O}^0 &:= (\overline{J(\mathcal{N})})' \\ \mathbb{R}^4 &= \mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^- \cup \mathcal{O}^0 \end{aligned}$$

Zu dieser Überdeckung wähle eine $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung φ^i, $i = 0, +, -$, der Eins mit $\text{supp}\varphi^i \subset \mathcal{O}^i$. Aufgrund der Kausalität gilt $\text{supp} u \subset J(\mathcal{N})$, also $u = \varphi^+ u + \varphi^- u$. Da u eine Lösung der Diracgleichung ist, folgt aus $\not{D} u = 0$

$$\not{D}\varphi^+ u = -\not{D}\varphi^- u =: f$$

Für den Träger von f gilt: $\text{supp} f \subset \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^- = \mathcal{O}$. Aus Lemma 15 folgt daher

$$S_+ f = S_+ \not{D}\varphi^+ u = \varphi^+ u$$

und analog

$$S_- f = -S_- \not{D}\varphi^- u = -\varphi^- u$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert $Sf = u$ und damit die Behauptung. ■

Satz 23: (Isomorphie der Phasenräume)

Es sei $\mathcal{O}$ ein Doppelkegel mit Basis $\mathcal{O}\!\!\!-$ zur Zeit t. Die in Definition 12 definierte Abbildung $B_t : K \to L$ ist ein Bogoliubovisomorphismus der Fermiphasenräume (K, Γ_k) und (L, Γ_L), d.h. B_t ist bijektiv und es gilt

1. $B_t \Gamma_K = \Gamma_L B_t$ (114)

2. $(B_t k, B_t k')_L = (k, k')_K \quad \forall k, k' \in K$ (115)

Weiter gilt für die lokalen Unterräume $K(\mathcal{O})$ bzw. $K(\mathcal{O}')$ und $L(\cancel{\mathcal{O}})$ bzw. $L(\cancel{\mathcal{O}}^C)$

3. $B_t(K(\mathcal{O})) = L(\cancel{\mathcal{O}})$ (116)

4. $B_t(K(\mathcal{O}')) = L(\cancel{\mathcal{O}}^C)$ (117)

Beweis: B_t ist dicht auf dem Testfunktionenraum über $\underline{\beta_t}$ definiert. Daher lassen sich die Behauptungen mit Hilfe von β_t zeigen.

• Vertauschen von B_t und Involution:

$J\underline{\beta_t} = \underline{\beta_t}\Gamma_L$ ist offensichtlich richtig; damit folgt (1.).

• Isometrie: zu zeigen ist

Es seien $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$, dann gilt $(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_K = (\underline{\beta_t}\,\underline{f}, \underline{\beta_t}\,\underline{g})_L$

Beweis: Wähle $g = Sh$ in Lemma 21, dann folgt

$$
\begin{aligned}
i\langle f, Sh\rangle &= \int \overline{(\rho_t Sf)}(\vec{x})\,(\rho_t Sh)\,(\vec{x})d\vec{x} \\
&= \int \overline{(i\gamma^0\rho_t Sf)}(\vec{x})\,\left(i\gamma^0\rho_t Sh\right)(\vec{x})d\vec{x} \\
&= (\beta_t f, \beta_t h)
\end{aligned}
$$

Damit gilt für alle $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$

$$
\begin{aligned}
(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_K &= i\langle f_1, Sg_1\rangle + i\langle g_2, Sf_2\rangle \\
&= (\beta_t f_1, \beta_t g_1) + (\beta_t g_2, \beta_t f_2) \\
&= (\underline{\beta_t f}, \underline{\beta_t g})_L
\end{aligned}
$$

• Injektivität: folgt aus der Isometrie und der Linearität von B_t;$B_t(K(\mathcal{O})) \subset L(\cancel{\mathcal{O}})$ und $B_t(K(\mathcal{O}')) \subset L(\cancel{\mathcal{O}}^C)$ wird durch die Ausbreitungseigenschaften von S begründet

• Surjektivität: zu zeigen ist

$$\underline{F} \in \underline{\mathcal{T}}_t(\cancel{\mathcal{O}}) \;\Rightarrow\; \exists f \in \underline{\mathcal{T}}(\mathcal{O}) \text{ mit } \underline{\beta_t}\,\underline{f} = \underline{F}$$

$$\underline{G} \in \underline{\mathcal{T}}_t(\cancel{\mathcal{O}}^C) \;\Rightarrow\; \exists g \in \underline{\mathcal{T}}(\mathcal{O}') \text{ mit } \underline{\beta_t}\,\underline{g} = \underline{G}$$

Beweis: Sei u die, wegen der Bemerkung zu Lemma 21 eindeutige, Lösung der gestörten Diracgleichung zu den Anfangsdaten $H \in \mathcal{T}_t(\cancel{\mathcal{O}})$, d.h. $\rho_t u = H$. Wähle $\mathcal{N} = \cancel{\mathcal{O}}$ in Lemma 22. Dann existiert ein $h \in \mathcal{T}(\mathcal{O})$ mit $u = Sh$, also

$$H = \rho_t u = \rho_t Sh$$

Hieraus folgt die Surjektivität für Testfunktionen mit Träger in $\mathcal{O}$. Das analoge Ergebnis erhält man für solche mit Träger in $\mathcal{O}'$, wenn man beachtet, daß auch diese kompakten Träger in einem Doppelkegel $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'$ haben und dann die Ausbreitungseigenschaften von S berücksichtigt. ■

6.4 Der Satz von Foit

J. J. Foit hat einen nützlichen Satz über die abstrakte Twisted Dualität von Fermifeldern bewiesen, der hier angewendet werden soll.

Definition 13: (Fockdarstellung der CAR bei Foit, Anhang in [7])

Sei H ein komplexer Hilbertraum, $\Gamma(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(H)$ der Fockraum über H. $\Gamma_n(H)$ ist das n-fache antisymmetrische Tensorprodukt von H mit $\Gamma_0(H) := \mathbb{C}$. Die Erzeuger $A(h)^*$ und Vernichter $A(h)$ sind in der üblichen Weise auf $\Gamma(H)$ definiert und erfüllen die CAR, insbesondere

$$\{A(h), A(k)^*\} = (h, k) \tag{118}$$

Das Fermifeld ist als selbstadjungierter Operator auf $\Gamma(H)$ definiert:

$$\Psi_F(h) := \frac{1}{\sqrt{2}} (A(h)^* + A(h)) \tag{119}$$

Es gilt

$$\{\Psi_F(h), \Psi_F(k)\} = \Re(h, k) \qquad (\Re = \text{Realteil}) \tag{120}$$

In seiner Doktorarbeit über „Twisted Dualität für freie Fermifelder“ beweist Foit den folgenden Satz.

Satz 24: (von J. J. Foit)

Sei $M \subset H$ ein reeller abgeschlossener Unterraum von H und $\Psi_F(h)$ das oben definierte Fermifeld auf dem Fockraum $\Gamma(H)$,

$$R_F(M) := \{\Psi_F(h) : h \in M\}'' \tag{121}$$

die durch $\Psi_F(h)$ erzeugte von-Neumann-Algebra und

$$M^\perp := \{h \in H : \Re(h, m) = 0, \forall m \in M\} \tag{122}$$

das reelle Orthogonalkomplement von M. Dann gilt

$$R_F(M)^{t\prime} = R_F(M^\perp) \tag{123}$$

Beweis: siehe [7] ∎

Das Feld $\Psi_K(k)$, $k \in K$, hat leider noch nicht die Eigenschaften von $\Psi_F(h)$, da K nicht der Einteilchenraum von $\mathcal{F} = \Gamma(\mathcal{H})$ ist. Es ist also noch etwas Arbeit notwendig, bis der obige Satz seine Anwendung findet.

6.5 Anschluß an Foit's Notation

Aus den Zweipunktfunktionen von $\Psi_K(k)$ erhält man zwei Skalarprodukte $(\cdot,\cdot)_\pm$ mittels

$$\begin{aligned} (k,h)_+ &:= \omega\left(\Psi_K(k)^*\Psi_K(h)\right) \qquad k,h \in K &(124)\\ (k,h)_- &:= \omega\left(\Psi_K(h)\Psi_K(k)^*\right) &(125)\end{aligned}$$

mit $\omega(A) := (\Omega, A\Omega)$. Ω ist der Vakuumvektor in $\mathcal{F}$. Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} (k,h)_K &= (k,h)_+ + (k,h)_- &(126)\\ (k,h)_+ &= (\Gamma_K h, \Gamma_K k)_- &(127)\end{aligned}$$

Wegen $|(k,h)_+|^2 \leq (k,k)_K(h,h)_K$ folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz die Existenz eines Operators P mit $(k,h)_+ = (k,Ph)_K$. Daß P hier sogar ein Projektor ist, wird in Anhang C bewiesen.
Es gilt $\Gamma_K P = (I-P)\Gamma_K$, da

$$(k, \Gamma_K Ph)_K = (Ph, \Gamma_K k)_K = (h, \Gamma_K k)_+ = (k, \Gamma_K h)_- = (k, (I-P)\Gamma_K h)_K$$

Definition 14: Zu K kann man die folgenden Unterräume definieren:

$$\begin{aligned} K_+ &:= PK &(128)\\ \Re K &:= \{k \in K : k = \Gamma_K k\} &(129)\\ \Re K(\mathcal{M}) &:= \Re K \cap K(\mathcal{M}) &(130)\end{aligned}$$

K_+ wird nachher der Hilbertraum sein, der mit Foits H identifiziert wird, während praktische Rechnungen besser in $\Re K$ ausgeführt werden. Daß dies möglich ist, rechtfertigt das folgende Lemma.

Lemma 25: Es existiert ein Isomorphismus reeller Hilberträume $O : \Re K \to K_+$ mit $Ok := \sqrt{2}Pk$, $k \in \Re K$. Man definiert dann lokale Unterräume von K_+ durch

$$K_+(\mathcal{M}) := O\left(\Re K(\mathcal{M})\right) \tag{131}$$

Beweis: (der Index K wird hier unterdrückt)

• Isometrie:

$$\begin{aligned} (Ok, Ok) &= 2(Pk,Pk) = (Pk,Pk) + (P\Gamma k, P\Gamma k) = (Pk,Pk) + ((I-P)k,(I-P)k)\\ &= (k,k)\end{aligned}$$

Da sich das Skalarprodukt mit Hilfe der Parallelogrammgleichung als Summe von Normen schreiben läßt, folgt $(Ok, Ok') = (k,k')$.

• Injektivität: folgt aus Isometrie und Linearität von O.

• Surjektivität: sei $h \in K_+$, setze $k := \frac{1}{\sqrt{2}}(Ph + \Gamma Ph)$, es ist dann $k \in \Re K$ und es gilt

$$Ok = P(Ph + \Gamma Ph) = Ph + P(I-P)\Gamma h = Ph = h$$

■

Definiert man nun die folgenden Feldoperatoren auf $\Gamma(K_+)$

$$\Xi(k) := A(Pk)^* + A(P\Gamma_K k), \quad k \in K \tag{132}$$

dann kann man für diese mit Hilfe der Eigenschaften der Erzeuger und Vernichter, die folgenden Eigenschaften nachrechnen:

$$\Xi(\Gamma_K k) = \Xi(k)^* \tag{133}$$

Antikommutatorrelation:

$$\{\Xi(k)^*, \Xi(k')\} = (k, k')_K \tag{134}$$

Zweipunktfunktion:

$$\omega\left(\Xi(k)^*\Xi(k')\right) = (k, k')_+ \tag{135}$$

$\Xi(k)$ ist eine zyklische Fockdarstellung der CAR auf $\Gamma(K_+)$, während $\Psi_K(k)$ eine zyklische Fockdarstellung auf $\mathcal{F} = \Gamma(\mathcal{H})$ ist (vgl. Lemma **??**). Sie haben dieselben algebraischen Eigenschaften und dieselben Zweipunktfunktionen, daß heißt beide Darstellungen sind wegen der Eindeutigkeit der GNS-Darstellung isomorph.

Lemma 26:

$$\begin{array}{rcl} \{\Xi(k) : k \in K(\mathcal{O}')\}'' & = & \{\Xi(k)V : k \in K(\mathcal{O})\}' \\ & \Updownarrow & \\ \{\Psi_K(k) : k \in K(\mathcal{O}')\}'' & = & \{\Psi_K(k)V : k \in K(\mathcal{O})\}' \end{array}$$

(V ist der Kleinoperator, einmal auf $\Gamma(K_+)$ und einmal auf $\Gamma(\mathcal{H})$)

Beweis: folgt aus obiger Isomorphie ■

Ferner gilt

Lemma 27:

$$\begin{array}{rcl} \{\Psi_K(k) : k \in K(\mathcal{O}')\}'' & = & \{\Psi_K(k)V : k \in K(\mathcal{O})\}' \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{R}(\mathcal{O}') & = & \mathcal{R}(\mathcal{O})^{t\prime} \end{array}$$

Beweis: Aus der Normstetigkeit von $k \mapsto \Psi_K(k)$ und $\Psi_K(\alpha(\underline{f})) = \mathbf{\Psi}(\underline{f})$ folgt

$$\{\Psi_K(k) : k \in K(\mathcal{M})\}'' = \{\mathbf{\Psi}(\underline{f}) : \underline{f} \in \underline{\mathcal{T}}, \mathrm{supp}\underline{f} \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{M}\}''$$

(Definition 8)

$$= \{\Psi^{\mathrm{int}}(f), \Psi^{\mathrm{int}}(f)^* : f \in \mathcal{T}, \mathrm{supp} f \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{M}\}''$$

(Definition 6)

$$= \mathcal{R}(\mathcal{M})$$

Gleiches gilt, wenn man den Kleinoperator mit in Betracht zieht, für die Twisted von-Neumann-Algebren. ■

Um den Anschluß an Foit's Notation zu finden, wählt man also $H = K_+$, und es folgt

$$\Psi_F(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A(h)^* + A(h)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi(\underbrace{h + \Gamma_K h}_{\in \Re K}), \qquad h \in K_+ \tag{136}$$

Damit kann man daß nächste Lemma beweisen:

Lemma 28:

$$\begin{array}{rcl} R_F(K_+(\mathcal{O}')) & = & R_F(K_+(\mathcal{O}))^{t'} \\ & \Updownarrow & \\ \{\Xi(k) : k \in K(\mathcal{O}')\}'' & = & \{\Xi(k)V : k \in K(\mathcal{O})\}' \end{array}$$

Beweis: Da eine von-Neumann-Algebra von ihren selbstadjungierten Elementen erzeugt wird, gilt

$$\{\Xi(k) : k \in K(\mathcal{M})\}'' = \{\Xi(k) : k \in \Re K(\mathcal{M})\}''$$

Wegen der Isomorphie von $\Re K$ und K_+ (Lemma 25) und da $\Psi_F(h) = \Xi(h + \Gamma_K h)$ ist (Gleichung (136)), folgt

$$\{\Xi(k) : k \in K(\mathcal{M})\}'' = \{\Psi_F(h) : h \in K_+(\mathcal{M})\}''$$

Die Definition von $R_F(M)$ (Gleichung (121)) gibt die Behauptung. ■

Man kommt zu dem Ergebnis, daß die Twisted Dualität der vom ausgeschmierten Feld erzeugten von-Neumann-Algebren äquivalent zur Twisted Dualität der von den Feldern $\Psi_F(h)$, $h \in K_+$ erzeugten von-Neumann-Algebren ist:

Lemma 29:

$$\begin{array}{rcl} R_F(K_+(\mathcal{O}')) & = & R_F(K_+(\mathcal{O}))^{t'} \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{R}(\mathcal{O}') & = & \mathcal{R}(\mathcal{O})^{t'} \end{array}$$

Beweis: folgt durch Hintereinandersetzen von Lemma 26 bis 28 ■

6.6 Satz über die Twisted Dualität

Lemma 30:

$$K_+(\mathcal{O}') = K_+(\mathcal{O})^\perp \tag{137}$$

Beweis: Der Hilbertraum L der Anfangsdaten (siehe Abschnitt 6.2) trägt ein einfaches Skalarprodukt (vergl. Gleichung (110)). Es ist daher klar, daß

$$\Re L(\not{\mathcal{O}}^C) = \Re L(\not{\mathcal{O}})^\perp$$

ist. Diese Identität läßt sich auch so interpretieren: das Feld zu fester Zeit ist im freien und im wechselwirkenden Fall dasselbe, da die Anfangsdaten hier unabhängig von der Differentialgleichung gewählt werden können. Für das freie Fermifeld gilt die Twisted Dualität für Doppelkegel aber bereits (vergl. [7]).

Aufgrund der Bogoliubov-Isomorphie von $K(\mathcal{M})$ und $L(\mathcal{M})$ (Satz 23) folgt

$$\Re K(\mathcal{O}') = \Re K(\mathcal{O})^\perp$$

Die Isomorphie von K_+ und $\Re K$ über den Operator O, der reelle Skalarprodukte erhält (Lemma 25), liefert

$$K_+(\mathcal{O}') = K_+(\mathcal{O})^\perp$$

■

Der nächste Satz über die Twisted Dualität des Fermifeldes im äußeren Feld ist das Hauptergebnis dieses Kapitels. Mit seinem Beweis ist auch der Beweis der Gleichheit der von-Neumann-Algebren des ausgeschmierten Feldes und des Feldes am Punkt (Satz **??**) abgeschlossen.

Satz 31: (Twisted Dualität)

Es sein $\mathcal{O}$ ein Doppelkegel, dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 6

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \mathcal{R}(\mathcal{O}')^{t'} \tag{138}$$

Beweis: Aus Lemma 30 folgt

$$R_F(K_+(\mathcal{O}')) = R_F(K_+(\mathcal{O})^\perp)$$

$\Psi_F(k)$, $k \in K_+$, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Foit (Satz 24). Dieser kann also hier angewendet werden. Er besagt:

$$R_F(K_+(\mathcal{O}))^{t'} = R_F(K_+(\mathcal{O})^\perp)$$

Damit folgt

$$R_F(K_+(\mathcal{O}')) = R_F(K_+(\mathcal{O}))^{t'}$$

Das ist nach Lemma 29 äquivalent zu

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}') = \mathcal{R}(\mathcal{O})^{t'}$$

Bildet man davon die Twisted Kommutante, so erhält man wegen Gleichung (83) die Behauptung. ■

A Abschätzungen

Lemma 32: Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt für alle $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^k} \leq \frac{(1+|\vec{q}|)^{|k|}}{(1+|\vec{p}|)^k} \tag{139}$$

Beweis: i) Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.
ii) Sei nun $k > 0$. Für $|\vec{p}| \geq |\vec{q}|$ gilt

$$|\vec{p}-\vec{q}| \geq |\vec{p}| - |\vec{q}| \geq 0$$

Da $a, b, c > 0$ und $a < b \Rightarrow a/b < (a+c)/(b+c)$ folgt durch Addition von $|\vec{q}|$ in Zähler und Nenner die Ungleichung

$$\frac{1}{1+|\vec{p}-\vec{q}|} \leq \frac{1}{1+|\vec{p}|-|\vec{q}|} \leq \frac{1+|\vec{q}|}{1+|\vec{p}|}$$

Wenn $|\vec{p}| < |\vec{q}|$ ist, gilt

$$|\vec{p}-\vec{q}| \geq |\vec{q}| - |\vec{p}| > 0$$

und damit hat man

$$\frac{1}{1+|\vec{p}-\vec{q}|} \leq \frac{1}{1+|\vec{q}|-|\vec{p}|} \leq \frac{1+|\vec{p}|}{1+|\vec{q}|} < 1 < \frac{1+|\vec{q}|}{1+|\vec{p}|}$$

Wenn man positive Potenzen dieser Ungleichung nimmt und $|k| = k$ ausnutzt, folgt

$$\frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^k} \leq \left(\frac{1+|\vec{q}|}{1+|\vec{p}|}\right)^k \leq \frac{(1+|\vec{q}|)^{|k|}}{(1+|\vec{p}|)^k}$$

Das Lemma ist damit für positive k bewiesen.
iii) Für negative k folgt die Behauptung unter Anwendung der Dreiecksungleichung aus

$$1+|\vec{p}-\vec{q}| \leq 1+|\vec{p}|+|\vec{q}| \leq (1+|\vec{p}|)(1+|\vec{q}|)$$

und potenzieren mit $|k|$, $|k| = -k$ liefert das Lemma für negative k:

$$\frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^k} = (1+|\vec{p}-\vec{q}|)^{|k|} \leq ((1+|\vec{p}|)(1+|\vec{q}|))^{|k|} = \frac{(1+|\vec{q}|)^{|k|}}{(1+|\vec{p}|)^k}$$

■

Lemma 33: Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$\int d\vec{p}\,' \frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{p}\,'|)^{|k|+4}} \cdot \frac{1}{(1+|\vec{p}\,'|)^k} \leq \frac{\jmath}{(1+|\vec{p}|)^k} \quad \text{mit} \quad \jmath := \int d\vec{q} \frac{1}{(1+|\vec{q}|)^4} \tag{140}$$

Beweis:

$$\int d\vec{p}' \frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{p}'|)^{|k|+4}} \cdot \frac{1}{(1+|\vec{p}'|)^k}$$

(Substitution $\vec{q} := \vec{p}-\vec{p}'$, $\Rightarrow \vec{p}' = \vec{p}-\vec{q}$))

$$= \int d\vec{q} \frac{1}{(1+|\vec{q}|)^{|k|+4}} \cdot \frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^k}$$

(Lemma 32 anwenden, um $\frac{1}{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^k}$ abzuschätzen)

$$\leq \int d\vec{q} \frac{1}{(1+|\vec{q}|)^{|k|+4}} \cdot \frac{(1+|\vec{q}|)^{|k|}}{(1+|\vec{p}|)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+|\vec{p}|)^k} \int d\vec{q} \frac{1}{(1+|\vec{q}|)^4}$$

■

B Operatoren, die $\mathcal{C}^\infty(H_0)$ invariant lassen

Lemma 34: (Operatoren, die $\mathcal{C}^\infty(H_0)$ invariant lassen)
Es seien $V^{(k)} : D^k_{H_0} \to \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$, ${H_0}^k$-beschränkte Operatoren mit der Eigenschaft

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{\alpha_t(V^{(k)})\Phi - V^{(k)}\Phi}{t} - V^{(k+1)}\Phi \right\| = 0 \quad \forall \Phi \in D^{k+1}_{H_0} \tag{141}$$

Dann gilt

$$V^{(0)} \equiv V : D^m_{H_0} \to D^m_{H_0} \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{142}$$

insbesondere

$$V : \mathcal{C}^\infty(H_0) \to \mathcal{C}^\infty(H_0) \tag{143}$$

und

$$V^{(m)}\Phi = (i)^m \underbrace{[H_0, ..[H_0,}_{\text{m-mal}} V]..]\,\Phi \quad \forall \Phi \in D^m_{H_0} \tag{144}$$

Beweis: Im Verlauf des Beweises wird gebraucht, daß die Abbildung $t \mapsto \alpha_t(V^{(n)})\Psi$ stetig ist für alle $\Psi \in D^n_{H_0}$. Dies wird zunächst bewiesen. Sei $\Psi \in D^n_{H_0}$, dann gilt folgende Abschätzung

$$\|\alpha_t(V^{(n)})\Psi - V^{(n)}\Psi\|$$

(Einsetzen von $\alpha_t(A) = U(t)AU(-t)$, Einfügen eines Terms $U(t)V^{(n)}\Psi$ und Dreiecksungleichung)

$$\leq \|U(t)\left(V^{(n)}U(-t)\Psi - V^{(n)}\Psi\right)\| + \|U(t)V^{(n)}\Psi - V^{(n)}\Psi\|$$

($\|U(t)\| = 1$ und Ausklammern)

$$\leq \|V^{(n)}\left(U(-t) - I\right)\Psi\| + \|\left(U(t) - I\right)V^{(n)}\Psi\|$$

(nach Voraussetzung ist $V^{(n)}$ in folgender Weise beschränkt: es existieren positive reelle Zahlen a_n und b_n, so daß $\|V^{(n)}\mathcal{X}\| \leq a_n\|{H_0}^n\mathcal{X}\| + b_n\|\mathcal{X}\|\ \forall\mathcal{X} \in D^n_{H_0}$)

$$\leq a_n\|{H_0}^n\left(U(-t) - I\right)\Psi\| + b_n\|\left(U(-t) - I\right)\Psi\| + \|\left(U(t) - I\right)V^{(n)}\Psi\|$$

(H_0 kommutiert mit $U(t)$)

$$= a_n\|\left(U(-t) - I\right){H_0}^n\Psi\| + b_n\|\left(U(-t) - I\right)\Psi\| + \|\left(U(t) - I\right)V^{(n)}\Psi\|$$

Es ist sowohl ${H_0}^n\Psi \in \mathcal{H}$ als auch $V^{(n)}\Psi \in \mathcal{H}$, und die Abbildung $t \mapsto U(t)\Phi$ ist stetig für alle $\Phi \in \mathcal{H}$, und damit ist dann auch $t \mapsto \alpha_t(V^{(n)})\Psi$, wie behauptet, für alle $\Psi \in D^n_{H_0}$ stetig.

Der weitere Beweis wird durch Induktion nach m durchgeführt.

($m = 0$): Es ist $D^0_{H_0} = D(I) = \mathcal{H}$, nach Voraussetzung gilt also $V : D^0_{H_0} \to D^0_{H_0}$.

($m \to m+1$): Das Lemma sei für alle $k \leq m$ bewiesen. Betrachtet wird nun folgende Identität: sei $\Phi \in D^{m+1}_{H_0}$

$$\begin{aligned}\frac{U(t) - I}{t}V^{(m)}\Phi &= \frac{\alpha_t(V^{(m)})U(t)\Phi - V^{(m)}\Phi}{t}\\ &= \alpha_t(V^{(m)})\frac{U(t) - I}{t}\Phi + \frac{\alpha_t(V^{(m)})\Phi - V^{(m)}\Phi}{t}\end{aligned}$$

Gezeigt wird, daß der Limes $t \to 0$ der rechten Seite existiert und wohldefiniert ist.

Nach Voraussetzung gilt für den zweiten Term

$$\lim_{t\to 0}\|\frac{\alpha_t(V^{(m)})\Phi - V^{(m)}\Phi}{t} - V^{(m+1)}\Phi\| = 0$$

Für den ersten Term gilt

$$\lim_{t\to 0}\|\alpha_t(V^{(m)})\frac{U(t) - I}{t}\Phi - V^{(m)}iH_0\Phi\| = 0$$

wegen folgender Abschätzung:

$$\|\alpha_t(V^{(m)})\frac{U(t) - I}{t}\Phi - V^{(m)}iH_0\Phi\|$$

(Einfügen von $\alpha_t(V^{(m)})iH_0\Phi$ und Dreiecksungleichung)

$$\leq \|U(t)V^{(m)}U(-t)\left(\frac{U(t)-I}{t}\Phi - iH_0\Phi\right)\| + \|\alpha_t(V^{(m)})iH_0\Phi - V^{(m)}iH_0\Phi\|$$

$$\leq \left\|V^{(m)}\underbrace{U(-t)\left(\frac{U(t)-I}{t}\Phi - iH_0\Phi\right)}_{\in D^m_{H_0}}\right\| + \left\|\left(\alpha_t(V^{(m)}) - V^{(m)}\right)\underbrace{iH_0\Phi}_{\in D^m_{H_0}}\right\|$$

(${H_0}^m$-Beschränktheit von $V^{(m)}$)

$$\begin{aligned}\leq a_m\|{H_0}^m U(-t)\left(\frac{U(t)-I}{t}\Phi - iH_0\Phi\right)\| \quad &+ \quad b_m\|U(-t)\left(\frac{U(t)-I}{t}\Phi - iH_0\Phi\right)\| \\ &+ \quad \|\left(\alpha_t(V^{(m)}) - V^{(m)}\right)iH_0\Phi\|\end{aligned}$$

($H_0U(t) = U(t)H_0$ und $\|U(t)\| = 1$)

$$\begin{aligned}\leq a_m\|\frac{U(t)-I}{t}{H_0}^m\Phi - iH_0{H_0}^m\Phi\| \quad &+ \quad b_m\|\frac{U(t)-I}{t}\Phi - iH_0\Phi\| \\ &+ \quad \|\left(\alpha_t(V^{(m)}) - V^{(m)}\right)iH_0\Phi\|\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme gehen gegen Null für $t \to 0$ nach Definition von H_0, der letzte, da wie oben gezeigt, $t \mapsto \alpha_t(V^{(m)})\Phi$ stetig ist für alle $\Phi \in D^m_{H_0}$.
Der Limes $t \to 0$ von der obigen Identität kann also gebildet werden. Dabei ist die rechte Seite per Definition von H_0 gegeben durch

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)-I}{t}V^{(m)}\Phi = iH_0V^{(m)}\Phi$$

und der Limes der Identität gibt die Gleichung

$$iH_0V^{(m)}\Phi = V^{(m)}iH_0\Phi + V^{(m+1)}\Phi$$

oder als Kommutatorgleichung

$$V^{(m+1)}\Phi = i\left[H_0, V^{(m)}\right]\Phi$$

In diese Gleichung wird für $V^{(m)}$ die Induktionsannahme

$$V^{(m)}\Psi = (i)^m\underbrace{[H_0, ..[H_0,}_{\text{m-mal}}\ V]..]\,\Psi \quad \forall\Psi \in D^m_{H_0}$$

eingesetzt und es folgt

$$V^{(m+1)}\Phi = (i)^{m+1}\underbrace{[H_0, ..[H_0,}_{\text{m+1-mal}}\ V]..]\,\Phi \quad \forall\Phi \in D^{m+1}_{H_0}$$

Insbesondere ist ${H_0}^{m+1} V \Phi$ wohldefiniert, daß heißt

$$V : D^{m+1}_{H_0} \to D^{m+1}_{H_0}$$

■

Achtung: die Datei lpsiinv.tex fehlt!

Beweis: Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte.

1. Sei $v \in \mathcal{C}^\infty(h_0)$, dann erfüllt $\mathbf{\Phi}(v)$ die Voraussetzung von Lemma 34, wobei $\mathbf{\Phi}(v)^{(k)} = \mathbf{\Phi}({h_0}^k v), k \in \mathbb{N}$, zu wählen ist. Mit diesem Lemma gilt dann $\mathbf{\Phi}(v) : \mathcal{C}^\infty(H_0) \to \mathcal{C}^\infty(H_0)$.

2. $\mathcal{G}(F) \in \mathcal{C}^\infty(h_0)$, denn dann gilt wegen (1.)

$$\Psi^{\text{int}}(F) = \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}(\overline{F})) : \mathcal{C}^\infty(H_0) \to \mathcal{C}^\infty(H_0)$$

zu 1.: Sei $v \in \mathcal{C}^\infty(h_0)$, dann gilt, da $\mathbf{\Phi}(\cdot)$ ein beschränkter Operator ist, daß

$$\mathbf{\Phi}({h_0}^k v) : \mathcal{H} \supset D^k_{H_0} \to \mathcal{H}$$

Ferner gilt für alle $\Psi \in \mathcal{F}$

$$\|\frac{1}{t}\left(\alpha_t\left(\mathbf{\Phi}({h_0}^k v)\right)\Psi - \mathbf{\Phi}({h_0}^k v)\Psi\right) - \mathbf{\Phi}({h_0}^{k+1} v)\Psi\|$$

(die Zeittranslation auf dem Fockraum ist mit der auf dem Einteilchenraum verknüpft durch $\alpha_t(\mathbf{\Phi}(v)) = \mathbf{\Phi}(v_t)$)

$$= \|\frac{1}{t}\left(\mathbf{\Phi}\left([{h_0}^k v]_t\right)\Psi - \mathbf{\Phi}({h_0}^k v)\Psi\right) - \mathbf{\Phi}({h_0}^{k+1} v)\Psi\|$$

(Antilinearität von $\mathbf{\Phi}$ ausnutzen)

$$= \|\mathbf{\Phi}\left(\frac{1}{t}\left([{h_0}^k v]_t - {h_0}^k v\right) - {h_0}^{k+1} v\right)\Psi\|$$

($\|\mathbf{\Phi}(v)\| = \|v\|_{\mathcal{H}}$)

$$\leq \|\frac{1}{t}\left([{h_0}^k v]_t - {h_0}^k v\right) - {h_0}^{k+1} v\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|$$

Da $v \in \mathcal{C}^\infty(h_0)$ ist, existiert der Limes $t \to 0$ der Abschätzung und die Norm geht per Definition von h_0 gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen von Lemma 34 erfüllt.

zu 2.: Sei $F \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^4\right)^4$, dann gibt es nach Lemma 7 ein λ, so daß für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\left|[\mathcal{G}(F)]^i_\epsilon(\vec{p})\right| \leq \frac{\lambda}{(1 + |\vec{p}|)^m}$$

Da h_0 auf $\mathcal{H}$ durch Multiplikation mit E_p wirkt, gilt

$$\|{h_0}^k \mathcal{G}(F)\|^2 = \sum_{i,\epsilon} \int d\vec{p} \left|(\epsilon E_p)^k [\mathcal{G}(F)]^i_\epsilon(\vec{p})\right|^2$$

$$\leq \sum_{i,\epsilon} \int d\vec{p} \left|(\epsilon E_p)^k \frac{\lambda}{(1+|\vec{p}|)^m}\right|^2$$

Wähle $m = k+2$, dann ist die Norm endlich abgeschätzbar und es gilt $\mathcal{G}(F) \in D({h_0}^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{G}(F) \in \mathcal{C}^\infty(h_0)$. ■

C P als Projektor

Hier wird gezeigt, daß der Operator P des Skalarprodukts $(h,k)_+ = (h,Pk)_K$ ein Projektionsoperator ist. $\mathcal{G}$ sei der in Lemma 7 definierte Operator $\mathcal{G} : \mathcal{T} \to \mathcal{H}$, α die in Lemma 19 definierte kanonische Involution $\alpha : \mathcal{T} \times \hat{\mathcal{T}} \to K$. Das Skalarprodukt auf K läßt sich dann wie folgt als Summe von Skalarprodukten auf $\mathcal{H}$ schreiben. Seien $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{\mathcal{T}}$

$$(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_K = \left\{\mathbf{\Psi}(\underline{f})^*, \mathbf{\Psi}(\underline{g})\right\}$$

(es gilt $\mathbf{\Psi}(\underline{f}) = \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_1)^* + \Psi^{\text{int}}(\hat{f}_2) = \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_1)^* + \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_2)$ nach Definition 8 und Definition des ausgeschmierten Feldes)

$$= \left\{\mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_1) + \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_2)^*, \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 g_1)^* + \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 g_2)\right\}$$

(Vertauschungsrelationen von $\mathbf{\Phi}(v)$ anwenden)

$$= (\mathcal{G}\gamma^0 f_1, \mathcal{G}\gamma^0 g_1)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\gamma^0 g_2, \mathcal{G}\gamma^0 f_2)_{\mathcal{H}}$$

(es gilt $(g,f)_{\mathcal{H}} = (\hat{f}, \hat{g})_{\mathcal{H}}$)

$$= (\mathcal{G}\gamma^0 f_1, \mathcal{G}\gamma^0 g_1)_{\mathcal{H}} + (\widehat{\mathcal{G}\gamma^0 f_2}, \widehat{\mathcal{G}\gamma^0 g_2})_{\mathcal{H}}$$

$$(\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_K = (\underline{\mathcal{G}\gamma^0 f}, \underline{\mathcal{G}\gamma^0 g})_{\mathcal{H}\oplus\hat{\mathcal{H}}} \tag{145}$$

$\underline{\mathcal{G}\gamma^0}$ ist also abschließbar zu einer Isometrie $V : K \to \mathcal{H} \oplus \hat{\mathcal{H}}$, insbesondere wegen der Linearität also injektiv. Nach Lemma **??** liegt $\mathcal{G}\mathcal{T}$ dicht in $\mathcal{H}$, daher ist V auch surjektiv. K und $\mathcal{H} \oplus \hat{\mathcal{H}}$ sind also isomorphe Phasenräume, denn analog zu K kann auch auf $\mathcal{H} \oplus \hat{\mathcal{H}}$ eine antilineare Involution definiert werden, die dann auch mit V vertauscht. Es gilt daher

$$(k,k')_K = (Vk, Vk')_{\mathcal{H}\oplus\hat{\mathcal{H}}}, \quad k,k' \in K \tag{146}$$

Nun kann man zeigen, daß P ein Projektor ist:

$$(\alpha(\underline{f}), P\alpha(\underline{g}))_K = (\alpha(\underline{f}), \alpha(\underline{g}))_+$$

$$= (\Omega, \mathbf{\Psi}(\underline{f})^* \mathbf{\Psi}(\underline{g})\Omega)$$

$$= (\Omega, \left(\mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_1) + \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 f_2)^*\right) \left(\mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 g_1)^* + \mathbf{\Phi}(\mathcal{G}\gamma^0 g_2)\right) \Omega)$$

($\mathbf{\Phi}(v) = a(P_+ v) + b(\overline{P_- v})^*$; der Vakuumerwartungswert ist nur dann von Null verschieden, wenn ein Vernichter und ein Erzeuger gleicher Sorte aufeinanderfolgen)

$$= (\Omega, \left(a(P_+\mathcal{G}\gamma^0 f_1) + b(\overline{P_-\mathcal{G}\gamma^0 f_2})\right) \left(a(P_+\mathcal{G}\gamma^0 g_1)^* + b(\overline{P_-\mathcal{G}\gamma^0 g_2})^*\right) \Omega)$$

$$= (\mathcal{G}\gamma^0 f_1, P_+\mathcal{G}\gamma^0 g_1)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\gamma^0 g_2, P_-\mathcal{G}\gamma^0 f_2)_{\mathcal{H}}$$

$$= (\mathcal{G}\gamma^0 f_1, P_+\mathcal{G}\gamma^0 g_1)_{\mathcal{H}} + (\widehat{\mathcal{G}\gamma^0} f_2, P_-\widehat{\mathcal{G}\gamma}^0 g_2)_{\mathcal{H}}$$

Es folgt also

$$(k, Pk')_K = (Vk, P_+ \oplus P_- Vk')_{\mathcal{H}\oplus\hat{\mathcal{H}}}, \quad k, k' \in K \tag{147}$$

$P = V^{-1} P_+ \oplus P_- V$ ist also eine Projektion.

Literatur

[1] Ruijsenaars, S.N.M.: On Bogoliubovtransformations for Systems of Relativistic Charged Particles, J. Math. Phys. **18**, 517-526 (1977)

[2] Ruijsenaars, S.N.M.: Charged Particles in External Fields. I, J. Math. Phys. **18**, 720-737 (1977)

[3] Ruijsenaars, S.N.M.: Charged Particles in External Fields. II, Commun. Math. Phys. **52**, 267-294 (1977)

[4] Wightman, A.S., Gårding, L.: Fields as Operator-Valued Distributions in Relativistic Quantum Theory, Arkiv för Fysik **28**, 129-184 (1965)

[5] Hertel, J.: Lokale Quantentheorie und Felder am Punkt, Interner Bericht, DESY T-81/01, Januar 1981

[6] Fredenhagen, K., Hertel, J.: Local Algebras of Observables and Pointlike Localized Fields, Commun. math. Phys. **80**, 555-561 (1981)

[7] Foit, J.J.: Twisted-Dualität für freie Fermifelder, Dissertation, Osnabrück (1983)

[8] Dimock, J.: Scalar Quantum Field in an External Gauge Field, J. Math. Phys. **20**(8), 1791-1796 (1979)

Danksagung

Herrn Prof. J. E. Roberts und Herrn Dr. C. Lüders möchte ich besonders herzlich für die vielen Gespräche und die itensive Betreuung meiner Diplomarbeit danken.